

Кратные и повторные интегралы

Семинар и задание 2.16 (27 мая 2015)

сw **Задача 1.** Выразите объём n -мерного эллипсоида с данными полуосями через объём n -мерного единичного шара.

hw **Задача 2** (Принцип Кавальери). Рассмотрим две области U, V в пространстве \mathbb{R}^n . Если для любого $a \in \mathbb{R}^k$ объём пересечения аффинного подпространства $(x_1, \dots, x_k) = (a_1, \dots, a_k)$ с U равен объёму пересечения этого подпространства с V , то объёмы областей U и V равны.

сw **Задача 3.** (а) Выразите объём n -мерной пирамиды через её высоту и $(n-1)$ -мерный объём основания.

hw (б) Пусть все грани n -мерного многогранника касаются единичного шара. Выразить его объём через $(n-1)$ -мерный объём его поверхности.

Задача 4. Найдите

сw (а) координаты центра масс полукруга $x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0$;

hw (б) координаты центра масс области, заданной неравенствами $\sqrt{x} + \sqrt{y} \leq 1, x \geq 0, y \geq 0$;

сw (с) объём тела, полученного при вращении круга $x^2 + y^2 \leq 1$ вокруг оси $x = -2$;

hw (д) объём фигуры, заданной неравенствами $5(x^2 + y^2) \leq z^2 \leq 15$. *Примечание:* учтите, что z может быть как положительно, так и отрицательно;

hw* (е) объём тела, полученного при вращении прямоугольника со сторонами 2 и 3 вокруг одной из диагоналей;

сw (ф) $\int_{-\pi}^{\pi} \int_1^2 \frac{e^x \sin y}{x} dx dy$.

Задача 5. Пусть область Ω лежит в первом квадранте и ограничена осями координат и кривой $\left(\frac{x}{3} + \frac{y}{6}\right)^3 = 9xy$.

сw (а) Найдите матрицу Якоби отображения $h: (r, \varphi) \mapsto (x, y) = (r \cos^2 \varphi, r \sin^2 \varphi)$ и её определитель.

сw (б) Запишите площадь области Ω в виде интеграла в координатах (r, φ) .

hw (с) Найдите этот интеграл.

hw **Задача 6.** Пусть область Ω ограничена кривыми $xy = 4, xy = 9, y = 4x$ и $y = x$ и лежит в первом квадранте.

(а) Найдите матрицу Якоби отображения $(x, y) \mapsto (u, v) = (xy, y/x)$ и её определитель.

(б) Найдите $\iint_{\Omega} \frac{y^2}{1+4xy} dx dy$.