

## Замена координат. Условный экстремум (продолжение)

Семинар и задание 2.15 (13 мая 2015)

**Задача 1.** Запишите в системе координат  $(p, q)$ , получающейся из системы координат  $(x, y)$  поворотом на угол  $\pi/4$ :

- sw* (a) оператор  $y \partial/\partial x + x \partial/\partial y$ ;  
**hw** (b) 1-форму  $x dx - y dy$ ;  
*sw* (c) уравнение  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ .

**Задача 2.** Исследуйте на условный экстремум функции

- sw* (a)  $y$  при  $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ ,  $(x, y) \neq (0, 0)$ ;  
**hw** (b)  $xy$  при  $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ ,  $(x, y) \neq (0, 0)$ ;  
*sw* (c)  $ax^2 + by^2$  при  $x^3 + y^3 = 1$ , где  $a$  и  $b$  — положительные параметры;  
**hw** (d)  $x^4 + y^4 + z^4$  при  $x^3 + y^3 + z^3 = 1$ .

**Задача 3.** Пусть  $p$  и  $q$  связаны соотношением  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .

- sw* (a) Найдите критические точки функции

$$\left( \sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{i=1}^n y_i^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

на поверхности  $\sum x_i y_i = A$ , предполагая  $x_i, y_i \geq 0$ .

- sw* (b) Выясните, являются ли полученные точки максимумом или минимумом, и докажите *неравенство Гёльдера*:

$$\left( \sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{i=1}^n y_i^q \right)^{\frac{1}{q}} \geq \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

- hw** **Задача 4.** (a) Пусть  $A = (a_{ij})$  — вещественная матрица порядка  $n \times n$ . Найдите критические точки  $\det(A)$  на поверхности  $\sum_{j=1}^n a_{ij}^2 = S_i$ .

**Указание.** Вспомните формулу для обратной матрицы.

- hw** (b) Выясните, являются ли определитель полученных в предыдущем пункте матриц минимальным или максимальным, и докажите *неравенство Адамара*:

$$(\det(A))^2 \leq \prod_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \right).$$