

Замена координат. Условный экстремум

Семинар и задание 2.14 (29 апреля 2015)

Задача 1. Пусть (r, φ) — полярные координаты на плоскости (x, y) . Выразите

- hw** (a) dr и $d\varphi$ через dx и dy ;
sw (b) dx и dy через dr и $d\varphi$;
hw (c) $\partial/\partial x$ и $\partial/\partial y$ через $\partial/\partial r$ и $\partial/\partial\varphi$;
sw (d) $\partial/\partial r$ и $\partial/\partial\varphi$ через $\partial/\partial x$ и $\partial/\partial y$.
hw (e) Запишите Лапласиан $\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ в полярных координатах.

hw* **Задача 2.** Пусть r', φ' — полярные координаты с центром в точке $(1, 0)$. Выразите

- (a) dr' и $d\varphi'$ через dr и $d\varphi$;
 (b) $\partial/\partial r'$ и $\partial/\partial\varphi'$ через $\partial/\partial r$ и $\partial/\partial\varphi$;

sw **Задача 3.** Рассмотрим ограничение невырожденной квадратичной формы с одним отрицательным квадратом на гиперплоскость. Убедитесь, что это ограничение — снова квадратичная форма. Сколько отрицательных квадратов может иметь это ограничение?

sw **Задача 4.** (a) Пусть функция имеет морсовскую критическую точку с одним отрицательным квадратом у второго дифференциала (гессиана). Пусть Γ — гладкая гиперповерхность, проходящая через эту точку. Может ли эта точка быть условным минимумом?

hw (b) Тот же вопрос, если число отрицательных квадратов гессиана больше 1.

sw **Задача 5.** Приведите пример функции f с невырожденной критической точкой a , и двух кривых Γ_1, Γ_2 , содержащих a , таких, что a — локальный минимум для $f|_{\Gamma_1}$ и локальный максимум для $f|_{\Gamma_2}$.

hw **Задача 6.** Приведите пример функции f и двух кривых Γ_1, Γ_2 , касающихся в некритической точке a функции f , таких, что a — локальный минимум для $f|_{\Gamma_1}$ и локальный максимум для $f|_{\Gamma_2}$.

hw* **Задача 7.** Пусть в точке a выполнено соотношение

$$df + \lambda_1 dg_1 + \dots + \lambda_m dg_m = 0 \tag{1}$$

при $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) = \lambda \in \mathbb{R}^m$. При каком условии на гессианы функций f, g_1, \dots, g_m в точке a решение уравнения (1) задается как график C^1 -гладкого отображения

$$\varphi: (\mathbb{R}^m, \lambda) \rightarrow (\mathbb{R}^n, a)?$$

Задача 8. Найдите и исследуйте критические точки на единичной сфере соответствующей размерности для следующих функций

- sw** (a) xy ;
hw (b) $5x^2 + 6xy + 5y^2$;

- cw* (c) $xy - z^2$;
hw (d) $x^4 + y^4 + z^4$;
hw (e) $(x - 0.5)^2 - 2y^2$.

cw **Задача 9.** (a) Как связаны критические точки ограничения квадратичной формы на единичную сферу с собственными векторами этой формы?

hw (b) При каком условии на квадратичную форму критические точки в предыдущей задаче будут Морсовскими?

hw* **Задача 10.** Пусть Γ — некритическая линия уровня функции g , и $a \in \Gamma$ — точка, критическая для ограничения $f|_{\Gamma}$, но не для f . Доказать, что линия уровня функции f , содержащая a , касается Γ в точке a .