

## Критические точки

Семинар и задание 2.13 (15 апреля 2015)

*cw* **Задача 1.** Пусть функция на шаре принимает максимум в точке  $a$  на границе шара. Докажите, что градиент функции в точке  $a$  направлен вовне сферы и перпендикулярен ей.

*cw* **Задача 2.** (а) Докажите, что если второй дифференциал в критической точке не равен нулю, то при любой  $C^2$ -гладкой замене координат это свойство сохраняется.

**hw** (б) Верно ли это свойство в некритической точке?

**Задача 3.** Пусть  $a$  — критическая точка дважды гладкой функции  $f$ ,  $H$  — диффеоморфизм  $(\mathbb{R}^n, a) \rightarrow (\mathbb{R}^n, a)$ .

*cw* (а) Докажите равенство квадратичных форм  $d^2(f \circ H)(a) = (d^2f)(a) \circ dH$ .

**hw** (б) Верно ли это, если точка  $a$  не является критической?

**Задача 4.** Найдите критические точки, исследуйте их тип и нарисуйте линии уровня следующих функций:

*cw* (а)  $x^2 + y^2$ ;

*cw* (б)  $x^2 - y^2$ ;

*cw* (в)  $xy$ ;

*cw* (д)  $y^2 - x + x^3$ ;

**hw** (е)  $y^2 - x^2 + x^4$ ;

**hw** (ф)  $y^2 + \cos x$ ;

**hw** (г)  $xy(x + y - 1)$ ;

**hw** (д)  $\sin(x + y) + \sin(x - y)$ .

**hw** **Задача 5.** (а) Сколько критических точек может иметь многочлен второй степени от двух переменных?

**hw** (б) Тот же вопрос для числа морсовских критических точек.