

# Дифференциал отображения. Неявная функция и её производная

Семинар и задание 2.12 (08 апреля 2015)

**Задача 1.** Найдите обратные к следующим отображениям  $\mathbb{R}^2$  в  $\mathbb{R}^2$  и вычислите дифференциал исходного и обратного отображения.

- cw* (a)  $F(x, y) = (f(y), g(x))$  для гладких обратимых  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ;  
**hw** (b)  $F(x, y) = (x, y + f(x))$  для гладкой  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Задача 2.** В окрестности каких точек обратимы следующие отображения? Вычислите дифференциал обратного отображения.

- cw* (a)  $F(x, y) = (x + y, xy)$ ;  
**hw** (b)  $F(x, y) = (x + y, x^2 + y^2)$ ;  
**hw** (c)  $F(x, y) = (xy, x^y), x > 0$ .

Рассмотрим теперь следующие три функции двух переменных:

$$f_1(x, y) = x^2 - 3xy + 2y^2; \quad f_2(x, y) = y^2 - x^2 + x^3; \quad f_3(x, y) = x^2 - y + y^3.$$

**Задача 3.** Для каждой из функций  $f_1, f_2, f_3$  укажите, в окрестности каких точек  $(x_0, y_0)$  множество уровня  $f_i(x, y) = f_i(x_0, y_0)$  задаётся в виде

- cw* (a)  $y = \varphi(x)$ , где  $\varphi$  — бесконечно гладкая функция,  $\varphi(x_0) = y_0$ ;  
**hw** (b)  $x = \psi(y)$ , где  $\psi$  — бесконечно гладкая функция,  $\psi(y_0) = x_0$ .

**Задача 4** (*cw*:  $i = 1$ , **hw**:  $i = 2, 3$ ). Для каждой из функций  $f_1, f_2, f_3$  нарисуйте множество  $f_i^{-1}(0)$ .

**Задача 5** (*cw*:  $i = 2$ , **hw**:  $i = 1, 3$ ). Найдите все точки, в которых линии уровня функции  $f_i, i = 1, 2, 3$ , имеют горизонтальную (вертикальную) касательную.

**Задача 6** (*cw*:  $i = 3$ , **hw**:  $i = 1, 2$ ). Найдите и нарисуйте множество всех точек, в которых линии уровня функции  $f_i, i = 1, 2, 3$ , и функции  $x^2 + 2y^2$  касаются друг друга.

**Задача 7.** Найдите все точки, в которых линии уровня функции  $f_i, i = 1, 2, 3$ , имеют

- cw* (a) порядок касания со своей касательной выше первого;  
**hw\*** (b) точки перегиба.

**hw\*** **Задача 8.** Выразите вторую производную неявной функции через дифференциал и матрицу Гессе.

*В задачах 4–6 в домашнем задании достаточно сделать 4 пункта из 6.*