Сходимость функций, их интегралов и производных

Семинар и задание 2.11 (01 апреля 2015)

Задача 1. Докажите, что следующие отображения непрерывны:

cw (a) определённое интегрирование $C_{[a,\,b]} \to \mathbb{R}$, переводящее f в $\int_a^b f(x)dx$;

hw (b) неопределённое интегрирование $C_{[a,\,b]} \to C_{[a,\,b]}$, переводящее f в $F(t) = \int_a^t f(x)dx$.

cw **Задача 2.** (a) Пусть последовательность f_n сходится к f, причём последовательность f_n' её производных равномерно сходится. Докажите, что предел f_n' равен f'.

hw (b) Достаточно ли потребовать сходимость исходной последовательности f_n в одной точке?

hw* (c) Достаточно ли поточечной сходимости f_n'?

Указание. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Задача 3. Рассмотрим пространство n-гладких функций на отрезке $[a, b]$ (все производные, включая n-ю, определены и непрерывны).

cw (a) Какие из следующих выражений определяют метрику на этом пространстве:

$$d_1(f,g) = \max_{0\le k\le n} \max_{x\in[a,b]} \left|f^{(k)}(x) - g^{(k)}(x)\right|,$$
$$d_2(f,g) = \min_{0\le k\le n} \max_{x\in[a,b]} \left|f^{(k)}(x) - g^{(k)}(x)\right|,$$
$$d_3(f,g) = \sum_{k=0}^{n} \max_{x\in[a,b]} \left|f^{(k)}(x) - g^{(k)}(x)\right|?$$

hw (b) Докажите эквивалентность соответствующих метрик.

Определение 1. Пространство n-гладких функций с метрикой d_3 обозначается $C^n_{[a,b]}$.

Задача 4. Докажите полноту

cw (a) $C^1_{[a,b]}$;

hw (b) $C^2_{[a,b]}$;

hw* (c) $C^n_{[a,b]}$.

Определение 2. Напомним, что функциональный ряд *сходится* по какой-либо норме, если последовательность частичных сумм фундаментальна по этой норме.

Задача 5. Докажите что тригонометрический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$$

cw (a) сходится в $C_{\mathbb{R}}$;

cw (b) расходится в $C^1_{\mathbb{R}}$.

Задача 6. Докажите что ряд для экспоненты

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

hw (a) сходится в $C_{[a,\,b]}$ для любого конечного отрезка $[a,\,b]$;
hw (b) сходится в $C^N_{[a,\,b]}$ для любого конечного отрезка $[a,\,b]$ и натурального N.

Указание. Для любого $X > 0$ найдется такой $M \in \mathbb{N}$, что $n > M$ влечёт $x^n/n! < C \cdot 2^{-n}$ при $|x| < X$.

Задача 7. Непрерывны ли отображения
cw (a) естественного вложения $C^k_{[a,b]}$ в $C^n_{[a,b]}$, $n < k$;
hw (b) дифференцирования $C^k_{[a,b]}$ в $C^{k-1}_{[a,b]}$;
hw (c) неопределённого интегрирования $C^k_{[a,b]}$ в $C^{k+1}_{[a,b]}$.

hw* **Задача 8.** Найдите пополнение (замыкание) множеств
(a) множества липшецевых функций в $C_{[a,b]}$;
(b) $C^k_{[a,b]}$ в $C^n_{[a,b]}$, $n < k$;
(c) множества дифференцируемых функций с $|f'| < 1$ в $C_{[a,b]}$.