

Метрические пространства: полнота

Семинар и задание 2.9 (11 марта 2015)

hw **Задача 1.** Найдите пополнение пространства всех чисел на отрезке $[0, 1]$, которые записываются в троичной системе конечными дробями из нулей и двоек.

Задача 2. Существует ли изометричное вложение дискретного пространства из четырёх точек (расстояния между различными точками равны 1) в евклидово пространство

sw (a) \mathbb{R}^3 ?

sw (b) \mathbb{R}^2 ?

Задача 3. Существует ли изометрия между

hw (a) \mathbb{R}^2 и \mathbb{R}^3 ?

sw (b) \mathbb{C}^n с эрмитовым скалярным произведением и метрикой $\rho(z, w) = \sqrt{\langle z - w, z - w \rangle}$ и евклидовым пространством \mathbb{R}^{2n} ?

sw **Задача 4.** (a) Докажите, что

$$\rho(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx \quad (1)$$

является метрикой на пространстве $C_{[0,1]}$.

hw (b) Полно ли пространство $C_{[0,1]}$ в метрике (1)?

Задача 5. Какие из следующих подмножеств пространства $C_{[0,1]}$ замкнуты?

sw (a) подмножество C^1 -гладких функций;

hw (b) подмножество многочленов произвольной степени;

sw (c) подмножество непрерывных функций, равных нулю в нуле;

hw (d) подмножество непрерывных функций с нулевым средним: $\int_0^1 f(x) dx = 0$;

hw (e) подмножество липшицевых функций с данной константой Липшица.