

Якобиан. Метрические пространства

Семинар и задание 2.8 (04 марта 2015)

Задача 1. Пусть $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Вычислите дифференциалы и якобианы следующих отображений:

- hw** (a) $x \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} x$;
hw (b) $x \mapsto (x_1^2 + x_2^2, x_1 + x_2)$;
sw (c) $x \mapsto x + a(\sin(x_1 + x_2), \sin(x_1 - x_2))$.

sw **Задача 2.** При каких значениях a якобиан отображения из п. 1с никогда не обращается в ноль?

Задача 3. Рассмотрим пространство $M \cong \mathbb{R}^{n^2}$ матриц $n \times n$ с вещественными коэффициентами. Вычислите дифференциал отображения $M \rightarrow M$, переводящего матрицу A в матрицу A^2 ,

- sw* (a) в единичной матрице;
hw (b) в произвольной точке.

hw* **Задача 4.** Решите аналогичную задачу для функции $\det: M \rightarrow \mathbb{R}$.

sw **Задача 5.** При каких значениях n функция $\rho(f, g) = \max(|f(0) - g(0)|, |f(1) - g(1)|)$ задаёт метрику на пространстве многочленов степени не выше n ?

Задача 6. Какие из следующих функций ρ являются метриками на соответствующих пространствах?

- hw** (a) $\rho(f, g) = |f(0) - g(0)|$ на пространстве функций вида $A \sin x + B \cos x$;
hw* (b) $\rho\left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right) = 2^{k-l}$, где k — наибольшая степень двойки, на которую делится bd , а l — наибольшая степень двойки, на которую делится $ad - bc$;
sw (c) $\rho_0(f, g) = \max_{0 \leq x \leq 1} |f(x) - g(x)|$ на пространстве $C^1[0, 1]$;
sw (d) $\rho(f, g) = 1 + \rho_0(f, g)$, где ρ_0 — функция из предыдущего пункта;
sw (e) $\rho(f, g) = -\rho_0(f, g)$, где ρ_0 — функция из предыдущего пункта;
hw (f) $\rho(f, g) = \frac{\rho_0(f, g)}{1 + \rho_0(f, g)}$, где ρ_0 — функция из предыдущего пункта.