

## Линии уровня. Градиент

Семинар и задание 2.6 (18 февраля 2015)

Пусть  $x, y$  --- переменные, соответствующие ортогональной системе координат;  
 $z = x + iy$ .

*sw* **Задача 1.** Пусть  $P$  --- комплексный многочлен,  $a$  ---  $k$ -кратный корень  $P$ . Найдите индекс векторного поля  $P(z)\partial/\partial z$  в точке  $a$ .

**hw** **Задача 2.** Докажите, что рациональная функция одного комплексного переменного в любой точке имеет предел, конечный или бесконечный.

*sw* **Задача 3.** Приведите пример рациональной функции двух переменных, не имеющей предела в точке  $(0, 0)$ .

**Задача 4.** Нарисуйте линии уровня и найдите индекс особых точек градиентного векторного поля следующих функций:

*sw* (a)  $x^2 + y^2$ ;

**hw** (b)  $x^2 - y^2$ ;

*sw* (c)  $5x - 4y$ ;

*sw* (d)  $x^2 + y^3 - 3y$ ;

**hw** (e)  $\cos x + \cos y$ ;

*sw* (f)  $\sqrt{x^2 + y^2}$ ;

**hw** (g)  $\sqrt[n]{x^2 + ay^2}$ , где  $a \in \mathbb{R}$  и  $n$  -- натуральное число.

**Задача 5.** Найдите частные производные и исследуйте на дифференцируемость следующие функции:

**hw** (a)  $\sqrt{x^2 + y^2}$ ;

*sw* (b)  $\operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ ;

**hw** (c)  $\sin(2 \arg(x + iy))$ .

*sw* **Задача 6.** Сформулируйте в строгих терминах и докажите, что градиент задает направление быстрого роста функции.

**Задача 7.** Пусть  $A$  --- симметрическая матрица размера  $n \times n$ . Найдите

*sw* (a) дифференциал;

**hw** (b) поле градиента

функции  $(A\mathbf{x}, \mathbf{x})$ , где  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ .