

## Длина кривой. Гипертригонометрические функции.

## Комплексные числа

Семинар и задание 2.5 (11 февраля 2015)

**Задача 1.** Вычислите длины участков графика функций:

- св* (a)  $y = 1/x, x \in [1, 2]$ ;  
**hw** (b)  $y = \sqrt{1 - x^2}, x \in [-1, 1]$ .

**Задача 2.** Найдите длины кривых, заданных параметрически:

- св* (a)  $x(t) = t - \sin(t), y(t) = 1 - \cos(t), t \in [0, 2\pi]$ ;  
**hw** (b)  $x(t) = \cos(t) + t \sin(t), y(t) = \sin(t) - t \cos(t), t \in [0, 2\pi]$ .

**hw\*** **Задача 3.** Пусть  $E(a, b)$  --- длина эллипса  $(a \cos(t), b \sin(t))$ .

- (a) Выразите  $E(a, b)$  интегралом  $\int_{\alpha}^{\beta} R(x, \sqrt{P(x)}) dx$ , где  $R$  --- рациональная функция,  $P(x)$  --- многочлен третьей степени.  
(b) Выразите длину периода синусоиды  $y = A \sin(Bx)$  через  $E(a, b)$ .

**Задача 4.** Получите из аналогичных свойств тригонометрических функций следующие свойства гиперболических функций:

- св* (a)  $\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = 1$ ;  
**hw** (b) выражения для  $\operatorname{ch}(x + y)$  и  $\operatorname{sh}(x + y)$ .

**hw** **Задача 5.** Найдите вещественную и мнимую части комплексного числа  $\frac{(1 + i)^{10}}{(1 - i)^{10}}$ .**Задача 6.** Пусть  $|\zeta| = 1, \zeta \neq \pm 1$ . Докажите следующими методами, что  $z = \frac{\zeta - 1}{\zeta + 1}$  --- чисто мнимое число.

- св* (a) Убедитесь, что  $\bar{z} = -z$ .  
**hw** (b) Без вычисления, используя геометрию окружности.

**Задача 7.** Решите уравнения

- св* (a)  $z^3 = 8$ ;  
*св* (b)  $z^3 = -8$ ;  
**hw** (c)  $z^4 = -4$ .

*св* **Задача 8.** Пусть  $\alpha = a + bi, a, b \in \mathbb{R}$ . Выразите модуль и аргумент  $z^\alpha$  через модуль и аргумент  $z$ .**hw** **Задача 9.** Найдите вещественные части, мнимые части и модули  $\cos(x + iy)$  и  $\sin(x + iy)$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ).