

Сходимость рядов и несобственных интегралов

Семинар и задание 2.4 (4 февраля 2015)

cw **Задача 1.** (а) Вычислите $\int \frac{dx}{x \ln x}$.

hw (b) Вычислите $\int \frac{dx}{x(\ln x)(\ln^2 x) \dots (\ln^n x)}$, где $f^{\circ k}$ — результат k -кратного применения f .

Задача 2. При каких $\alpha \in \mathbb{R}$ сходятся интегралы:

cw (a) $\int_1^\infty x^\alpha dx$;

hw (b) $\int_0^1 x^\alpha dx$;

cw (c) $\int_1^\infty x^\alpha \sin x dx$;

hw (d) При каких α последний интеграл сходится абсолютно?

Задача 3. Исследуйте на сходимость

cw (a) $\int_0^\infty x^N e^{-x} dx$, $N \in \mathbb{N}$;

hw (b) $\int_1^\infty \frac{(\ln x)^n}{x^\alpha} dx$, $\alpha > 0$, $n \in \mathbb{Z}$;

hw (c) $\int_0^1 \frac{(\ln x)^n}{x^\alpha} dx$, $\alpha > 0$, $n \in \mathbb{Z}$;

cw **Задача 4.** Пусть $f(x)$ — неотрицательная невозрастающая функция. Докажите, что интеграл $\int_1^\infty f(x) dx$ сходится и расходится одновременно с рядом $\sum_{n=1}^\infty f(n)$.

Задача 5. При каких значениях параметров α , $\beta > 0$ сходятся ряды

cw (a) $\sum \frac{1}{n^\alpha}$;

hw (b) $\sum \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$.

cw **Задача 6.** Выразите $\sin z$ и $\cos z$ через гиперболические функции $\operatorname{sh} z$ и $\operatorname{ch} z$.