

# Интегрирование: квазимногочлены, замена переменной, интегрирование по частям

Семинар и задание 2.3 (28 января 2015)

**Задача 1.** Найдите первообразные функции ( $\lambda \neq 0$ ).

- cw* (a)  $x \exp(\lambda x)$ ;  
*cw* (b)  $x^2 \sin(\lambda x)$ ;  
**hw** (c)  $x^2 \cos(\lambda x)$ ;  
**hw** (d) произвольного квазимногочлена.

**Указание.** Сначала найдите производные этих функций. При поиске ответа можете воспользоваться квазимногочленом с неопределёнными коэффициентами.

**Задача 2.** Используя интегрирование по частям, вычислите

- cw* (a)  $\int \ln(x) dx$ ,  
*cw* (b)  $\int \operatorname{arctg}(x) dx$ ,  
**hw** (c)  $\int \arcsin(x) dx$ ,  
**hw** (d)  $\int x^a \ln(x) dx$ ,  
**hw** (e)  $\int x^2 \operatorname{arctg}(x) dx$ ,  
**hw\*** (f)  $\int \frac{\operatorname{arctg}(x)}{x^2} dx$ .

**Задача 3.** Получите рекуррентные формулы для вычисления следующих интегралов, и вычислите их.

- cw* (a)  $I_n = \int \sin^n(x) dx$ ,  $n > 0$ ,  
**hw** (b)  $J_n = \int \frac{dx}{\cos^n(x)}$ ,  $n > 0$ .

**Задача 4.** Комбинируя замену переменной и интегрирование по частям, вычислите

- cw* (a)  $\int x^5 \exp(x^2) dx$ ,  
**hw** (b)  $\int x^5 \exp(x^3) dx$ ,  
**hw\*** (c)  $\int \exp(\sqrt{x}) dx$ ,  
**hw\*** (d)  $\int \operatorname{arctg}(\sqrt{x}) dx$ .

**hw\*** **Задача 5.** Для  $x, y \geq 0$  определим *Бета-Функцию*<sup>1</sup>  $B(x, y) = \int_0^1 t^x (1-t)^y dt$ .

- (a) Найдите  $B(x, 0)$ .  
(b) Докажите, что  $B(x, y) = B(y, x)$ .  
**Указание.** Замените переменную.  
(c) Докажите, что  $B(x, y+1) = B(x, y) - B(x+1, y)$ .

**Указание.** Раскройте одну из скобок.

- (d) Докажите, что  $B(x-1, y) = \frac{y}{x} B(x, y-1)$ .

**Указание.** Проинтегрируйте по частям.

- (e) Докажите, что  $B(m, n) = C_{m+n}^m / (m+n+1)$  для целых  $m$  и  $n$ .

<sup>1</sup>в классическом определении аргументы сдвинуты на единицу по историческим причинам