Интегрирование рациональных функций и квадратичных иррациональностей

Семинар и задание 2.2 (21 января 2015)

Задача 1. Разложите в сумму простейших дробей и найдите первообразные следующих функций:

(a) $\frac{1}{(x-a)(x-b)}$;
(b) $\frac{1}{(x-a)(x-b)(x-c)}$;
(c) $\frac{1}{(x-a)^2(x-b)}$;
(d) $\frac{1}{(x-a)^2(x-b)^2}$;
(e) $\frac{1}{1-x^3}$;
(f) $\frac{1}{1+x^3}$.

Задача 2. Пусть R — рациональная функция. Произведите подстановки и убедитесь, что задача сводится к интегрированию рациональных функций.

(a) $\int R(\exp(x))dx$, $t = \exp(x)$.
(b) $\int R(\sin(x), \cos(x))dx$, $t = \exp(ix)$.
(c) $\int R(\sin(x), \cos(x))dx$, $t = \operatorname{tg}(x/2)$.

В следующих пунктах сделайте указанную замену, и убедитесь, что задача сводится к одной из предыдущих. Выпишите явно замену t, рационально зависящую от аргументов функции R, которая сводит задачу к интегрированию рациональной функции.

(d) $\int R(x, \sqrt{1-x^2})dx$, $x = \sin(t)$.
(e) $\int R(x, \sqrt{x^2+1})dx$, $x = \operatorname{sh}(t)$.
(f) $\int R(x, \sqrt{x^2-1})dx$, $x = \operatorname{ch}(t)$.

В следующих пунктах придумайте подстановку, которая сводит задачу к одному из предыдущих пунктов.

(g) $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$.
(h) $\int R(x, \sqrt{ax+b}, \sqrt{cx+d})dx$.

Задача 3. Вычислите следующие неопределённые интегралы.

(a) $\int \frac{dx}{1+e^x}$;
(b) $\int \frac{dx}{1-e^x}$;
(c) $\int \operatorname{tg}(x)dx$;
(d) $\int (x)dx$;
(e) $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$;
(f) $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-1}}$;
(g) $\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}dx$;