Листок 9. Сжимающие отображения, неявные функции и условный экстремум

срок сдачи 20.05.2015

9◇1 При каких значениях параметров λ и μ следующие отображения $C[a,b] \to C[a,b]$ будут сжимающими:

а) $f \mapsto (\lambda x + \mu) f$;

б) $f \mapsto \lambda \int_\mu^x f(t)dt$?

9◇2 Пусть $A\colon V \to V$ — сжимающий линейный оператор, $v \in V$ — произвольный вектор. Докажите, что отображение $x \mapsto F_v(x) = A(x) + v$ имеет неподвижную точку, если

а) $V = \mathbb{R}^2$;

б) $V = \mathbb{R}^n$.

в*) Верно ли аналогичное утверждение, если $V = l_2$?

9◇3 Пусть A — сжимающий оператор с константой $q < 1$ на полном метрическом пространстве с расстоянием $d(x, y)$, а f — его неподвижная точка. Докажите, что расстояние от произвольной точки x до f допускает следующую оценку через расстояние от точки x до её образа $A(x)$:

$$d(x, f) \le \frac{d(x, A(x))}{1 - q}.$$

9◇4 Пусть F — гладкая функция на плоскости с координатами (x, y), и $D_y F \neq 0$.

а) Докажите, что каждая линия уровня этой функции — график $y = \varphi(x)$ гладкого отображения $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

б) Найдите области, где касательные к этим линиям уровня имеют положительный (отрицательный) наклон.

в*) Найдите области, где эти линии уровня выпуклы вверх (вниз)

г*) Пусть $F(0,0) = 0$, $y = \varphi(x)$ — уравнение линии $F = 0$ вблизи нуля. Найдите частную сумму ряда Тейлора для $\varphi(x)$ в нуле до членов третьей степени включительно по ряду Тейлора функции F в нуле.

9◇5 Пусть многочлен имеет критическую точку, гессиан в которой невырожден. Докажите, что близкие многочлены той же степени имеют близкую критическую точку, гладко зависящую от их коэффициентов.

9◇6 Для конечного набора окружностей на плоскости найдите гладкую функцию, линия нулевого уровня которой совпадает с объединением этих окружностей.

9◇7 Постройте гладкую функцию трёх переменных, нулевая поверхность которой образует:

а) тор (поверхность бублика);

б*) сферу с k ручками.

9◇8 Пусть f — C^∞-функция с критической точкой 0, тейлоровское разложение которой в нуле начинается с однородного многочлена степени n. Пусть этот однородный многочлен положителен всюду на единичной сфере. Доказать, что функция f имеет в нуле локальный минимум.

9◇9 Пусть дифференциалы C^1-функций f и g отличны от нуля и пропорциональны в точке a. Доказать, что a — критическая точка ограничения функции f на поверхность уровня функции g, проходящую через точку a.

9◇10 Сформулировать и доказать

а) необходимое;

б) достаточное

условие условного экстремума функции на подмногообразии произвольной размерности.

9◇11* Пусть Γ — поверхность вида $\{\, x \in U_\varepsilon(a) \mid g(x) = g(a) \,\}$, $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, точка a некритическая для g. Сформулировать подробно и доказать следующее утверждение: касательная плоскость $T_a\Gamma$ — это предел секущих, проведённых через точку a.

9◇12 Пусть Γ — поверхность вида $\{\, x \in U_\varepsilon(a) \mid g(x) = g(a) \,\}$, $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, точка a некритическая для g, и ограничение $f|_\Gamma$ имеет в точке a локальный минимум. Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ —соответствующие множители Лагранжа, и гессиан F_2 функции

$$F = f + \lambda_1 g_1 + \dots + \lambda_m g_m$$

в точке a невырожден. Сколько отрицательных квадратов может при этих условиях иметь квадратичная форма F_2?