Листок 8. Индекс. Гладкие отображения. Метрические пространства

срок сдачи 22.04.2015

8⋄1 Пусть векторное поле v, заданное в окрестности S^1, направлено внутрь круга в точках окружности. Найдите $ind^{S^1} v$.

Указание. Нарисуйте полосу возможных значений аргумента v в зависимости от точки окружности.

8⋄2 Докажите *теорему Брауэра о неподвижной точке*: отображение диска строго в себя имеет неподвижную точку.

Указание. Используйте результат предыдущей задачи.

8⋄3* Докажите, что если C^2-гладкая функция на компактной поверхности имеет только две критические точки, то эта поверхность гомеоморфна сфере.

8⋄4 Рассмотрим множество $\mathcal{P}_n$ многочленов одной переменной степени n со старшим коэффициентом 1. Отождествим $\mathcal{P}_n$ с $\mathbb{R}^n$, сопоставляя многочлену $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0$ точку $(a_{n-1}, ..., a_0)$.

а) Найдите дифференциал отображения $\mathcal{P}_n \times \mathcal{P}_m \to \mathcal{P}_{n+m}$, заданного как $(P, Q) \mapsto PQ$.

б) Найдите матрицу Якоби для этого отображения и её определитель.

в*) Докажите, что дифференциал этого отображения вырожден в точке (P, Q) тогда и только тогда, когда многочлены P и Q имеют общий корень.

г*) Убедитесь, что определитель из предыдущей задачи равен результанту многочленов P и Q. Выведите отсюда теорему, что многочлены P и Q имеют общий корень тогда и только тогда, когда их результант равен нулю.

8⋄5 Найдите дифференциал отображения $\mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_{2n-1}$, заданного как $P \mapsto \frac{PP'}{n}$.

8⋄6 Докажите, что подмножество метрического пространства замкнуто тогда и только тогда, когда оно является пересечением всех своих ε-окрестностей по $\varepsilon > 0$.

8⋄7 Докажите, что пространство l_2 полно.

8⋄8 Докажите, что пространство l_∞ полно.

8⋄9* Докажите компактность Гильбертова кирпича: $H = \{\, x \in l_2 \mid |x_n| \le 2^{-n} \,\}$.

8⋄10 Компактна ли единичная сфера в пространстве l_2?

8⋄11* Докажите, что неподвижная точка $\operatorname{fix} A$ сжимающего отображения A непрерывно зависит от отображения. Точнее, пусть A и B --- два сжимающих отображения полного метрического пространства M в себя с константой сжатия $q < 1$. Пусть $\rho(Ax, Bx) < \varepsilon$ для каждого $x \in M$. Найдите оценку сверху на расстояние $\rho(\operatorname{fix} A, \operatorname{fix} B)$.

8⋄12 Докажите, что всякое компактное метрическое пространство полно.