Листок 7. Непрерывность и дифференцируемость функций многих переменных

срок сдачи 18.03.2015

7◇1 Приведите пример функции на плоскости, непрерывной вдоль всякой прямой, но разрывной по совокупности переменных.

7◇2 Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна по x и равномерно непрерывна по y, то есть $\sup_x |f(x, y) - f(x, y_0)| \to 0$ при $y \to y_0$. Докажите, что функция f непрерывна по совокупности переменных.

7◇3 Постройте разрывную рациональную функцию, имеющую всюду частные производные.

7◇4 Докажите, что функция, имеющая всюду ограниченные частные производные, непрерывна.

7◇5 Пусть M_n — пространство вещественных матриц $n \times n$. Найдите дифференциалы следующих отображений из M_n в M_n:

а) $X \mapsto X^2$,

б*) $X \mapsto e^X$,

в) $X \mapsto X^{-1}$.

7◇6 Приведите пример функции $f(x, y)$, имеющей в точке $(0, 0)$ производные по всякому направлению, но не дифференцируемой в $(0, 0)$.

7◇7 Приведите пример такой функции $f(x, y)$, имеющей в точке $(0, 0)$ производные $\partial_h f$ вдоль всякого вектора h, что отображение $h \mapsto \partial_h f$ не является линейным.

7◇8 Пусть функция $f(x, y)$ имеет только невырожденные критические точки. Рассмотрим её градиентное векторное поле: $v(x, y) = \operatorname{grad} f(x, y)$. Найдите индекс особой точки векторного поля v в случае когда она является:

а) минимумом;

б) максимумом;

в) седлом функции f.

7◇9* Трижды дифференцируемая функция в единичном круге

- равна нулю на граничной окружности;
- не имеет на ней критических точек;
- имеет только невырожденные критические точки.

Докажите, что число экстремумов этой функции внутри единичного круга на единицу больше чем седел.

Указание. Примените результат предыдущей задачи и теорему о сумме индексов к градиентному векторному полю заданной функции.

7◇10* Постройте опровергающий пример к задаче 2.4б) книги М. Спивака «Математический анализ на многообразиях»:

Пусть g --- непрерывная нечётная функция на единичной окружности. Определим функцию на плоскости как линейную интерполяцию функции g на каждой прямой, проходящей через 0:

$$f(x) = \begin{cases} |x|g(\frac{x}{|x|}), & x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Показать, что f не дифференцируема в нуле, кроме случая $g \equiv 0$.

7$\diamond$11* Исправьте формулировку и докажите полученное утверждение.