Листок 6. Логарифм, интеграл и не только

срок сдачи 04.03.2015

1. Логарифм и экспонента

Замечание. *Предлагаемое определение логарифма и экспоненты были предложены А. Н. Колмогоровым в его лекциях для школьников. Интеграл определялся как площадь, а вместо формулы замены переменной использовалось сохранение площади при гиперболических поворотах:* $(x, y) \mapsto (ax, \frac{y}{a})$, $a > 0$.

6◇1 Для $x > 0$ положим

$$\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}.$$

Докажите, что

$$\ln xy = \ln x + \ln y$$

Указание. Воспользуйтесь заменой переменной.

6◇2 Докажите, что

а) $\ln x \to +\infty$ при $x \to +\infty$;

б) $\ln x \to -\infty$ при $x \to 0+$.

6◇3 $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

6◇4 Существует функция $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, обратная к функции ln. Она обозначается символом exp.

6◇5 $\exp(x + y) = (\exp x)(\exp y)$.

6◇6 $(\exp x)' = \exp x$.

6◇7 $\exp x = \sum_0^\infty \frac{x^k}{k!}$

6◇8 $\exp x = \lim\,(1 + \frac{x}{n})^n$.

6◇9 Положим $e = \exp 1$. Докажите, что $\exp x = e^x$.

2. Разное

6◇10 Длина кривой γ, заданной непрерывно дифференцируемым отображением f отрезка [0,1] в евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ (т.е. $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x)$, где функции $f_1, \dots, f_n$ имеют непрерывные производные, $|f'(x)| = \sqrt{|f_1'(x)|^2 + \dots + |f_n'(x)|^2}$), равна

$$|\gamma| = \int_0^1 |f'(x)| dx.$$

6◇11 Запишите отображение отрезка [0,1] в $\mathbb{R}^3$, задающее винтовую линию.

6⋄12 Докажите следующее неравенство Лагранжа для гладкой кривой $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}^n$ в евклидовом пространстве:

$$|f(b) - f(a)| \leq |b - a| \max_{[a,b]} |f'|.$$

6⋄13 Докажите формулы для производных комплексной экспоненты и логарифма.

6⋄14 Не прибегая к производным, докажите формулу о связи логарифма и арктангенса.

6⋄15* Докажите, что сумма порядков нулей и полюсов рациональной функции на сфере Римана равна нулю.

6⋄16 Известно, что $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится и $f(x) \geq 0$. Обязательно ли функция f стремится к нулю при $x \to +\infty$?

3. Аксиоматическое определение интеграла Римана

6⋄17 Рассмотрим пространство C^0 кусочно-непрерывных функций с компактным носителем на прямой (т.е. функций, равных нулю вне некоторого отрезка). Докажите, что оно линейно.

6⋄18* Рассмотрим линейное отображение (функционал) $I\colon C^0 \to \mathbb{R}$ со следующими свойствами:

положительность:

$$f \geq 0 \Rightarrow I(f) \geq 0;$$

трансляционная инвариантность:

$$I(f \circ T_a) = I(f), \text{ где } T_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ --- перенос: } T_a(x) = x + a;$$

аддитивность:

$$I(f \cdot \chi_{[a,b]}) + I(f \cdot \chi_{[b,c]}) = I(f \cdot \chi_{[a,c]});$$

нормировка:

$$I(\chi_{[0,1]}) = 1.$$

Докажите, что I --- интеграл Римана. Здесь χ_A --- характеристическая функция множества A, то есть $\chi_A|_A = 1,\ \chi_A|_{CA} = 0$.