Листок 5. Интегрирование

срок сдачи 18.02.2015

1. Алгебраические методы интегрирования и рациональность квадрик

5◇1 Пусть R --- рациональная функция от x, не имеющая полюса в точке $a \in \mathbb{C}$. Докажите, что

$$\frac{R}{(x-a)^n} = \frac{p(x)}{(x-a)^n} + R_1,$$

где $p \in \mathbb{C}[x]$, $\deg p < n$, а R_1 --- рациональная функция, не имеющая полюса в a.

5◇2 а) Докажите, что всякая рациональная функция разлагается на простейшие дроби:

$$R(x) = p(x) + \sum_j \frac{p_j}{(x-a_j)^{n_j}}. \tag{1}$$

Здесь p и p_j --- многочлены с комплексными коэффициентами, причём $\deg p_j < n_j$; суммирование ведётся по всем корням многочлена знаменателя рациональной функции R.

Указание. Проведите индукцию по числу корней знаменателя R.

б) Найдите интеграл от правой части формулы (1).

в) Докажите, что всякая рациональная функция с вещественными коэффициентами разлагается в сумму *простейших вещественных дробей*, то есть дробей вида $\frac{p_j}{q_j^n}$, где $\deg(q_j) \le 2$.

Указание. Сгруппируйте слагаемые, соответствующие сопряжённым корням.

5◇3 Пусть $R_n(x) = \frac{1}{x^n+1}$.

а) Разложите $R_4(x)$ на простейшие комплексные дроби.

б) Разложите $R_4(x)$ на простейшие вещественные дроби.

в) Вычислите $\int \frac{dx}{x^4+1}$.

г*) Решите аналогичную задачу для $R_n(x)$.

5◇4 а) Выразите $\sin(x)$, $\cos(x)$ через $t = \mathrm{tg}(x/2)$.

б) Выразите $\mathrm{sh}(x)$, $\mathrm{ch}(x)$ через $t = \tanh(x/2)$.

в) В предыдущих пунктах выразите dx через dt.

5◇5* Докажите, что для любой комплексной проективной квадрики Q существует рациональная биекция сферы Римана на Q (то есть биекция $\mathbb{C}\cup\infty \to Q$, задаваемая рациональными функциями $x = R_1(t),\ y = R_2(t)$).

5◇6* Найдите все *пифагоровы тройки*, то есть целочисленные решения уравнения $a^2 + b^2 = c^2$.

2. Интегрируемость функций по Риману

5◇7 Докажите, что интеграл Римана существует для тех и только тех функций на отрезке, для которых супремум множества нижних интегральных сумм равен инфинуму множества верхних интегральных сумм.

Определение 1. Функция называется *кусочно-непрерывной* на отрезке, если она имеет на нем лишь конечное число точек разрыва, и в каждой из них имеет односторонние пределы слева и справа.

5◇8 Докажите, что всякая кусочно-непрерывная функция на отрезке интегрируема по Риману.

5◇9 Напомним, что *функция Римана* равна нулю во всех иррациональных точках, и равна $\frac{1}{q}$ в точках, заданных несократимой дробью $\frac{p}{q}$. Докажите, что функция Римана интегрируема на отрезке $[0, 1]$, и найдите её интеграл.

Определение 2. *Колебанием* функции в точке называется разность её верхнего и нижнего предела в этой точке.

5◇10* Докажите, что для любой функции на отрезке и любого $\varepsilon > 0$ множество точек, колебание функции в которых больше или равно ε, замкнуто.

Определение 3. Будем говорить, что множество A на отрезке $[0, 1]$ *имеет меру* 0, если для любого $\varepsilon > 0$ его можно покрыть счетным объединением интервалов, сумма длин которых меньше ε.

5◇11* Пусть множество точек, в которых колебание ограниченной функции f на отрезке $[0, 1]$ не меньше ε, имеет меру 0. Тогда супремум множества нижних интегральных сумм f отличается от инфинума множества верхних интегральных сумм f не больше, чем на ε.

5◇12* Докажите *критерий Лебега*: ограниченная функция на отрезке интегрируема по Риману, если и только если множество её точек разрыва имеет меру 0.