Лекции по математическому анализу, 1 курс, 2 семестр

Лектор: Ю. С. Ильяшенко

зима–весна 2015

Оглавление

1 Интегральное исчисление

Лекция 1. Интеграл Римана

1.1. Первообразная

Определение 1. *Первообразной* для данной функции f называется такая функция F, что её производная равна данной функции: $F' = f$.

***Теорема* 1.1.** *Две первообразные одной функции отличаются на константу.*

***Основная теорема* 1.** *Всякая непрерывная функция имеет первообразную.*

Соглашение 1. По умолчанию, все области определения — интервалы.

1.2. Задача о площадях: интеграл Римана

Определение 2. *Разбиение* отрезка $[a, b]$, $a < b$ — это множество $P = \{a_0, ..., a_n\}$, $a_0 = a$, $a_n = b$, $a_i < a_{i+1}$; $\operatorname{diam} P = \max \Delta_j$; $\Delta_j = [a_{j-1}, a_j]$; Δ_j означает как отрезок, так и его длину.

Определение 3. Говорят, что набор $\alpha = \{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ *совместим* с разбиением P, если $\alpha_j \in \Delta_j$.

Определение 4. *Интегральной суммой*, соответствующей функции f, разбиению P и набору α (по умолчанию — совместимому с P), называется число:

$$S(f, P, \alpha) = \sum f(\alpha_j)\Delta_j.$$

Определение 5. *Интеграл Римана* $I = \int_a^b f(x)dx$ — это предел

$$I = \lim_{\operatorname{diam} P \to 0} S(f, P, \alpha).$$

***Основная теорема* 2.** *Всякая непрерывная функция на отрезке интегрируема по Риману.*

1.3. Свойства интегральных сумм

Определение 6. $S^+(f, P) = \sum \max_{\Delta_j} f \cdot \Delta_j$, $S^-(f, P) = \sum \min_{\Delta_j} f \cdot \Delta_j$ — это верхняя и нижняя интегральные суммы, соответствующие функции f и разбиению P.

***Предложение* 1.2.** $\forall f, P, \alpha\colon S^-(f, P) \leqslant S(f, P, \alpha) \leqslant S^+(f, P)$.

Определение 7. Рабиение Q является *измельчением* разбиения P, если $P \subset Q$.

***Предложение* 1.3.** *При измельчении разбиения верхняя интегральная сумма не увеличивается, а нижняя не уменьшается.*

***Предложение* 1.4.** *Любая нижняя интегральная сумма (нестрого) меньше любой верхней (для одной и той же функции).*

***Предложение* 1.5.** *Для любой функции f, разбиения P и набора α, выполняется неравенство $\min_{[a,b]} f(b-a) \leqslant S(P, f, \alpha)$*

1.4. Доказательство основной теоремы 2

U и L — множества значений всех верхних (соответственно, нижних) сумм для f на $[a, b]$.

***Лемма* 1.6.** $U \geq \min_{[a,b]} f \cdot (b-a),\ L \leqslant \max_{[a,b]} f \cdot (b-a)$.

Положим: $u = \inf U,\ l = \sup L$.

***Лемма* 1.7.** $l \leqslant u$.

***Лемма* 1.8.** $l = u$.

***Лемма* 1.9.** $I := l = u = \int_a^b f(x)dx$.

Основная теорема 2 доказана.

1.5. Добавления

***Теорема* 1.10.** *Всякая кусочно непрерывная функция интегрируема по Риману.*

Примеры. 1. Функция Дирихле

$$f = \chi_Q|_{[a,b]}$$

не интегрируема по Риману.

2. Функция Римана интегрируема по Риману — докажите!

Лекция 2. Формула Ньютона–Лейбница и элементарные методы интегрирования

2.1. Интеграл с переменным верхним пределом

***Теорема* 2.1.** *Пусть функция f непрерывна, и $G(x) = \int_a^x f(t)dt$. Тогда $G' = f$.*

***Следствие* 2.2** (Формула Ньютона–Лейбница)**.** *Если $F' = f$ и f непрерывна, то*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

На житейский язык эта формула переводится следующим образом:

> Путь, пройденный с переменной скоростью от момента времени a до момента b, равен площади под графиком скорости над отрезком $[a, b]$.

***Следствие* 2.3** (Основная теорема 1)**.** *Всякая непрерывная функция имеет первообразную.*

2.2. Формула замены переменной

***Теорема* 2.4.** $\int f \circ g \cdot g'(x)dx = F \circ g$, *где* $F = \int f\,dx$.

***Теорема* 2.5.**

$$\int_a^b f \circ g dg = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)dx \tag{1.1}$$

если g — диффеоморфизм.

На формуле (1.1) основан метод замены переменной.

2.3. Интегрирование по частям

Формула Лейбница $(fg)' = f'g + gf'$ влечёт:

$$\int fdg = fg - \int gdf$$

На этой тривиальной формуле основан мощный метод интегрирования.

Примеры. 1. $\int \ln x dx = x \ln x - x d \ln x = x(\ln x - 1) + C$

2. Пусть $f, g \in C^2$, $f(0) = g(0) = f(1) = g(1) = 0$. Тогда

$$\int_0^1 f'' g dx = \int_0^1 g'' f dx$$

2.4. Свойства интеграла Римана: линейность и аддитивность

Теорема 2.6 (линейность интеграла). $\int_a^b (c_1 f(x) + c_2 g(x))dx = c_1 \int_a^b f(x)dx + c_2 \int_a^b g(x)dx.$

Интеграл Римана может быть определён на отрезке $[a, b]$ и в случае, когда $b < a$ или $b = a$. В последнем случае он, по определению, равен нулю. В первом случае разбиением отрезка $[a, b]$, $b < a$, называется по-прежнему набор точек $P = \{a_0, ..., a_n\}$, $a_0 = a$, $a_n = b$, но вместо условия $a_j < a_{j+1}$, налагавшегося при $a < b$, требуется: $a_j > a_{j+1}$. Все остальные определения интегральных сумм и интегралов остаются прежними.

Отрезок $[a, b]$ при $a < b$ (соответственно, $a > b$) называется *положительно* (соответственно, *отрицательно*) ориентированным. Заметим, что интеграл от положительной функции по отрицательно ориентированному отрезку отрицателен.

Теорема 2.7 (аддитивность интеграла). *Пусть* $f \in C([a, b] \cup [b, c])$. *Тогда*

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

Заметим что теорема верна независимо от порядка точек a, b, c *на прямой.*

Теоремы 2.6 и 2.7 доказываются с помощью проверки аналогичных утверждений для интегральных сумм (она тривиальна), с последующим переходом к пределу.

2.5. Табличные интегралы

$$\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c,\ a \neq -1 \qquad \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + c,\ a \in \mathbb{R}_+ \qquad \int e^{\alpha x}\,dx = \frac{1}{\alpha}e^{\alpha x} + c,\ \alpha \in \mathbb{C}$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + c \qquad \int \cos x\,dx = \sin x + c$$

$$\int \frac{1}{1-x^2}dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + c \qquad \int \frac{1}{1+x^2}dx = \operatorname{arctg} x + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + c \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + c$$

Эти формулы нужно будет обосновать на занятиях.

2.6. Графическое интегрирование

По графику функции часто можно нарисовать приблизительный график первообразной. Примеры нарисованы на лекции.

2.7. Алгебраические методы интегрирования

Теорема 2.8. *Следующие функции имеют первообразные, выражаемые через элементарные функции:*

a) Квазимногочлены;
b) Рациональные функции;
c) Тригонометрические многочлены;
d) Рациональные функции от синуса и косинуса;
e) Рациональные функции от x и $\sqrt{P_2(x)}$, где P_2 — многочлен второй степени.

Эта теорема будет доказана на следующей лекции.

2.8. Алгебраические методы интегрирования: алгоритмы

Метод неопределенных коэффициентов $(e^{\lambda x}P(x))' = e^{\lambda x}q(x)$, q дано, P — искомое. Равносильное уравнение

$$\lambda P + P' = q$$

представляет собой треугольную систему.

Разложение рациональной дроби на простейшие Если все корни a_j многочлена q — простые, то выполнена *формула Сохоцкого*:

$$\frac{P(x)}{q(x)} = d(x) + \sum \frac{\lambda_j}{x - a_j}, \quad \text{где } \lambda_j = \frac{P(a_j)}{q'(a_j)}.$$

Правая часть предыдущего разложения интегрируется. Вещественный ответ легко пишется, когда все a_j — вещественные, и требует дополнительных усилий в комплексном случае.

c) Пусть P и Q — многочлены. Функция $P(e^{ix}, e^{-ix})$ представляется в виде $\sum_{-N}^{N} a_k e^{ikx}$ и легко интегрируется. Функция $Q(\sin x, \cos x)$ представляется в виде $P(e^{ix}, e^{-ix})$ с помощью формулы Эйлера.

d) Если R — рациональная функция, то интеграл

$$I = \int R(e^{ix})dx$$

сводится к интегралу от рациональной функции подстановкой $t = e^{ix}$:

$$\int R(e^{ix}, e^{-ix})dx = \int \frac{1}{ie^{ix}} R(e^{ix, e^{-ix}})de^{ix} = \int \frac{R(t, \frac{1}{t})}{t}dt$$

e) $\int R(x, \sqrt{P_2(x)})dx$ превращается в интеграл от рациональной функции с помощью ``униформизации квадрики'':

для кривой $S : y^2 = P_2(x)$ существует рациональное взаимнооднозначное отображение $\mathbb{R} \to S$:

$$\text{если } P(x) = bx(x - a), \text{то}$$

$$x = \frac{ab}{b - t^2},\ y = \frac{abt}{b - t^2}.$$

У этих формул есть замечательное алгебро-геометрическое объяснение, которое будет дано позже.

Лекция 3. Алгебраические методы интегрирования

3.1. Напоминание

На прошлой лекции была сформулирована и частично доказана

***Теорема* 3.1.** *Следующие функции имеют первообразные, выражаемые через элементарные функции:*

a *Квазимногочлены;*

b *Тригонометрические многочлены;*

c *Рациональные функции;*

d *Рациональные функции от синуса и косинуса;*

e *Рациональные функции от* x *и* $\sqrt{P_2(x)}$, *где* P_2 — *многочлен второй степени.*

Утверждение а) доказано на прошлой лекции.

3.2. Тригонометрические многочлены

Формула Эйлера сводит интегрирование любого многочлена от синусов и косинусов к интегрированию многочлена от $\exp ix$, которое, в свою очередь, сводится к табличному интегрлу.

3.3. Разложение на простейшие

***Теорема* 3.2.** *Рациональная дробь, знаменатель которой — многочлен с простыми (комплексными) корнями, а степень числителя меньше, чем степень знаменателя, разлагается в сумму простейших дробей:*

$$R(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \sum \frac{\lambda_j}{x - a_j}, \text{ где } \lambda_j = \frac{p(a_j)}{q'(a_j)},$$

a_j — *корни многочлена* q.

Отсюда следует утвеждение с) предыдущей теоремы для рациональных функций общего положения.

Доказательство теоремы основано на лемме

***Лемма* 3.3.** *Рациональная функция, не имеющая полюсов на сфере Римана, постоянна.*

***Замечание* 1.** *Условие* $\deg p < q$ *не ограничивает общности.*

3.4. Рациональные функции от тригонометрических

***Теорема* 3.4.** *Интеграл от рациональной функции от синуса и косинуса сводится к интегралу от рациональной функции с помощью замены:* $e^{ix} = t$.

3.5. Рациональные функции от x и $\sqrt{p_2(x)}$

Теорема 3.5. *Интеграл от рациональной функции от x и $y = \sqrt{p_2(x)}$ сводится к интегралу от рациональной функции с помощью замены:*

$$x(t) = \frac{ab}{b-t^2},\ y(t) = \frac{abt}{b-t^2}.$$

Доказательство использует тот факт, что $\sqrt{bx(t)(x(t)-a)} = y(t)$. Это загадочное упрощение объясняется *рациональностью квадрики*; это сделано ниже.

3.6. Рациональность квадрики

Квадрикой (а также коникой) называется любая кривая второго порядка на плоскости, т.е. кривая вида $p_2(x,y) = 0$, где p_2 — многочлен второй степени.

Определение 8. Отображение $\mathbb{C} \to \mathbb{C}^2$ называется рациональным, если оно задается рациональными функциями $R_j : t \mapsto (x,y) = (R_1(t), R_2(t))$.

Определение 9. Кривая на плоскости называется рациональной, если существует рациональная биекция прямой на эту кривую.

Теорема 3.6. *Всякая квадрика, вещественная или комплексная, рациональна.*

Доказательство проводится с помощью стереографической проекции из точки квадрики на прямую.

Именно таким путем получена подстановка п.4.

Лекция 4. Несобственные интегралы

4.1. Длина кривой

Определение 10. Длина кривой — это предел последовательности длин вписанных в нее ломаных при стремлении к нулю длины их максимальных звеньев.

***Теорема* 4.1.** *Длина графика дифференцируемой функции f, заданной на отрезке $[a,b]$ равна*

$$L = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}dx$$

.

***Теорема* 4.2.** *Длина кривой γ, заданной отображением f отрезка [0,1] в Евклидово пространство $\mathbb{R}^n$, равна*

$$|\gamma| = \int_0^1 |f'(x)|dx.$$

4.2. Определение несобственного интеграла

Определение 11. Несобственными интегралами называются:

a) интеграл от неограниченной непрерывной функции на конечном полуинтервале

b) интеграл от ограниченной непрерывной функции на бесконечном интервале

c) их линейные комбинации.

Эти интегралы определяются так:

a) если $f \in C(a,b],\ a < b$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx; \tag{1.2}$$

b) если $f \in C[a,\pm\infty)$, то

$$\int_a^{\pm\infty} f(x)dx = \lim_{A\to\pm\infty}\int_a^A f(x)dx \tag{1.3}$$

c) на линейные комбинации интегралов a) и b) определение распространяется по линейности.

Примеры.

$$1) \qquad \int_0^1 \ln x dx = \lim_{\varepsilon\searrow}\int_\varepsilon^1 \ln x dx = x(\ln x - 1)\big|_0^1 = -1.$$

$$2) \quad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+1} = \lim_{A\to\infty}\operatorname{arctg} x\big|_{-A}^A = \pi.$$

4.3. Абсолютная и условная сходимость

Определение 12. Несобственный интеграл называется сходящимся (в точке a или на ∞), если предел (1.2) или (1.3) существует, и расходящимся в противном случае.

Определение 13. Несобственный интеграл сходится абсолютно, если существует предел (1.2) или (1.3) для $|f|$ вместо f, и условно в противном случае.

Примеры.

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} \text{ абсолютно сходится}$$

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x} \text{ расходится}$$

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx \text{ сходится условно, но не абсолютно.}$$

4.4. Теорема сравнения

Определение 14. Скажем, что $f \prec g$ на ∞ (g *мажорирует* f на ∞), если существуют такие $c > 0$ и A, что $|f(x)| < cg(x)$ при $x \in [A, \infty)$.

***Теорема* 4.3.** *Пусть g мажорирует f на ∞. Тогда:*

a если интеграл $\int_a^\infty g(x)dx$ сходится, то интеграл $\int_a^\infty f(x)dx$ сходится абсолютно;

b если интеграл $\int_a^\infty f(x)dx$ расходится, то интеграл $\int_a^\infty g(x)dx$ тоже расходится.

Эта теорема является основным средством при установлении сходимости интегралов.

Примеры. 1. $\int_1^\infty \frac{(\ln x)^{2015}}{x^{1+\frac{1}{2015}}} dx$ сходится, *поскольку подинтегральная функция мажорируется* $g(x) = \frac{1}{x^{1+\varepsilon}}$, $\varepsilon = \frac{1}{2016}$ (степень сильнее логарифма).

2. $\int_1^\infty x^{2015} e^{-\frac{x}{2015}} dx$ сходится, поскольку подинтегральная функция мажорируется $g(x) = e^{-\varepsilon x}$, $\varepsilon = \frac{1}{2016}$ (экспонента сильнее степени).

2 Элементарные функции комплексного переменного

Лекция 5. Комплексные логарифм и экспонента

5.1. Определение и свойства вещественного логарифма и экспоненты, по Колмогорову

5.2. В гостях у Эйлера

Определение 15. $e^z = \sum \frac{z^k}{k!}$

***Теорема* 5.1.** *Ряд сходится* $\forall z \in \mathbb{C}$.

***Теорема* 5.2.** $e^z = \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{z}{n})^n$

Формула Эйлера как предельный случай формулы Муавра.

***Теорема* 5.3.** $e^{x+iy} = e^x(\cos x + i\sin y)$.

5.3. Комплексный логарифм

Определение 16. Логарифм — функция, обратная экспоненте (нужны уточнения).

Определение 17. $\ln z = \ln |z| + i \arg z$

Это вообще не функция, потому что $\ln z$ определен неоднозначно!

5.4. Производные функций комплексного переменного

Определение 18. Функция $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ комплексно дифференцируема, если существует предел

$$f'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}, \; z, h \in \mathbb{C}.$$

Примеры. Функции z и 1 имеют комплексную производную. Функции $\bar{z}, x, y, |z|$ комплексной производной не имеют!

***Теорема* 5.4.** *Для комплексного дифференцирования справедливы те же формулы для производных от суммы, произведения, частного, как и в вещественном случае.*

Доказательства точно такие же.

***Следствие* 5.5.** *Все многочлены и квазимногочлены дифференцируемы. Рациональные функции дифференцируемы во всех точках, кроме полюсов.*

***Замечание* 2.** *Ограничение комплексной производной на вещественную ось совпадает с вещественной производной.*

5.5. Производные многочлена, логарифма, экспоненты

***Теорема* 5.6.** *Справедливы следующие формулы для комплексных производных:*

$$(z^n)' = nz^{n-1}, \; z \in \mathbb{C}, \; n \in \mathbb{Z};$$

$$(\ln z)' = \frac{1}{z}, \; (e^z)' = e^z, \; (e^{\lambda z})' = \lambda e^{\lambda z}$$

5.6. Интегрирование рациональных функций

***Теорема* 5.7.** *Пусть*

$$R(z) = p_0(z) + \sum \frac{p_j(z)}{(z-a_j)^{k_j}} + \sum \frac{\lambda_j}{z-a_j}, \text{ где } k_j > 1,\ \deg p_j < k_j.$$

Тогда

$$\int R(z)dz = P_0(z) + \sum \frac{\tau p(z)}{(z-a_j)^{k_j-1}} + \sum \lambda_j \ln(z-a_j).$$

Многочлены τp_j находятся явно с помощью разложения многочлена p_j по степеням $z-a_j$.

5.7. Логарифм и арктангенс — близнецы-братья

Применим предыдущую теорему к $R(z) = \frac{1}{z^2+1}$. Получим

$$\int \frac{dz}{z^2+1} = \frac{1}{2i} \ln \frac{z-i}{z+i} + C$$

Однако известно, что

$$\int \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x + C'.$$

***Следствие* 5.8.** *При $x \in \mathbb{R}$,*

$$\frac{1}{2i} \ln \frac{x-i}{x+i} = \operatorname{arctg} x + C. \tag{2.1}$$

Чему равно C?

***Теорема* 5.9.** *В предыдущей формуле $C = -\frac{\pi}{2}$:*

$$\frac{1}{2i} \ln \frac{x-i}{x+i} = \operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2}. \tag{2.2}$$

Эти свойства позволяют применять алгебраические методы интегрирования независимо от того, являются ли корни вспомогательных многочленов вещественными или комплексными.

Лекции 6–7. Индекс векторного поля. Основная теорема алгебры

6–7.1. Индекс векторного поля вдоль замкнутой кривой

Определение 19. Векторное поле — это соответствие, которое сопоставляет каждой точке области приложенный к ней вектор (направленный отрезок). Векторные поля на плоскости можно задавать комплекснозначными функциями.

Пример 1. $v(z) = 1;\ z;\ \bar{z};\ z^2$

Определение 20. Замкнутая кривая на плоскости — это непрерывное отображение $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2,\ \gamma(0) = \gamma(1)$.

Всюду ниже векторные поля задаются непрерывными отображениями $\mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto v(z)$.

Определение 21. Индекс векторного поля вдоль замкнутой кривой — это число полных оборотов вектора поля, совершаемых при обходе кривой; обозначение: $i_\gamma v$.

Более подробно, для любого непрерывного поля $v(z)$ и кривой $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$, такой, что $v(\gamma(t)) \neq 0 \forall t$, можно определить непрерывную функцию на $[0,1]$

$$\varphi(t) = \arg v(\gamma(t)).$$

Тогда

$$i_\gamma v = \frac{\varphi(1) - \varphi(0)}{2\pi}.$$

***Замечание* 3.** *Индекс зависит только от ориентации кривой, а не от ее параметризации.*

Пример 2. Пусть $\gamma(t) = e^{2\pi i t},\ v(z) = z^k,\ z \in \mathbb{Z}$. Тогда $i_\gamma v = k$.

6–7.2. Индекс особой точки векторного поля

Определение 22. Особая точка векторного поля — это та. где поле обращается в ноль.

Мотивировка. В особой точке у вектора поля нет направления (хотя само поле может оставаться гладким, и в этом смысле неособым).

Определение 23. Индекс особой точки векторного поля-0-это индекс поля вдоль малой положительно ориентированной окружности с центром в этой точке. Более точно, особая точка должна быть изолированной, и окружность не должна содержать внутри себя других особых точек, кроме центра.

***Теорема* 6–7.1.** *Определение не зависит от радиуса окружности.*

Доказательство. Доказательство основано на принципе: непрерывная функция с целочисленными значениями постоянна. □

6–7.3. Теорема о сумме индексов

Основная теорема 3. *Рассмотрим непрерывное векторное поле с изолированными особыми точками. Тогда индекс этого векторного поля вдоль замкнутой кривой γ, не проходящей через особые точки, равен сумме индексов особых точек поля, заключенных внутри кривой.*

6–7.4. Дама с собачкой

Теорема 6–7.2. *Пусть на замкнутой кривой γ векторные поля $|v|$ и $|w|$ удовлетворяют соотношению: $|v| > |w|$. Тогда*

$$i_\gamma v = i_\gamma (v + w).$$

Доказательство. Индекс $i_\gamma v_t$, $v_t = v + tw$ определен при всех t, поскольку $v_t \neq 0$ на γ. Он непрерывно зависит от t и, значит, постоянен. □

6–7.5. Основная теорема алгебры

Теорема 6–7.3. *Многочлен степени n имеет на комплексной плоскости n корней с учетом кратности.*

Доказательство. Пусть

$$P_n(z) = z^n + P_{n-1}(z).$$

Заметим, что

$$\frac{P_{n-1}(z)}{z^n} \to 0 \text{ при } z \to \infty.$$

Следовательно, на положительно ориентированной окружности $\gamma : |z| = R$ при достаточно большом R,

$$|z^n| > |P_{n-1}(z)|.$$

Тогда

$$i_\gamma P_n(z) = i_\gamma z^n = n.$$

Но, по основной теореме, левая часть равна числу корней P_n внутри γ с учетом кратности. □

3 Функции многих переменных

Лекция 8. Дифференциал функции

8.1. Определение непрерывной функции

8.2. Напоминание:

три определения производной функции одного переменного:

- предел разностного отношения;
- главная линейная часть приращения;
- тангенс угла наклона касательной.

На многомерный случай обобщается второе определение.

8.3. Дифференциал функции

Определение 24. *Дифференциал функции* — это главная линейная часть ее приращения:

$$f(x+h) - f(x) = l(h) + o(h),$$

где l — линейный функционал.

8.4. Касательное пространство

Определение 25. *Касательное пространство* в точке $x \in \mathbb{R}^n$ — это пространство векторов-стрелок $\xi = [x, x+\xi]$, приложенных в точке x. Оно изоморфно $\mathbb{R}^n : [x, x+\xi] \mapsto \xi$. Операции наследуются. Обозначение: $T_x\mathbb{R}^n$.

Дифференциал функции — линейный функционал на касательном пространстве, $l : \xi \mapsto l(\xi)$. Обозначение $l = df(x)$; $df(x;\xi) = l(\xi)$.

8.5. Производная функции вдоль вектора

$$L_\xi f(x) = \frac{d}{dt} f(x+t\xi)|_{t=0}.$$

Лемма 8.1. *Производная функции вдоль вектора есть значение дифференциала на этом векторе:* $L_\xi f(x) = df(x;\xi)$.

Доказательство. $f(x+t\xi) - f(x) = df(x;t\xi) + o(t\xi) = tdf(x,\xi) + o(t)$;

$$L_\xi f(x) = \lim df(x,\xi) + \frac{o(t)}{t} = df(x,\xi).$$

□

Определения: векторное поле; производная функции вдоль векторного поля.

8.6. Производные по Гато и Фреше. Частные производные

Дифференциал функции называется производной *по Фреше*. Производная функции вдоль вектора называется производной *по Гато*.

Возьмем базис $e_1, ..., e_n$ в $\mathbb{R}^n$ и рассмотрим постоянные векторные поля в $\mathbb{R}^n$.

Определение 26.

$$D_j f = \frac{\partial f}{\partial x_j} = L_{e_j} f.$$

***Предложение* 8.2.** *Пусть* $e_1, \dots, e_n$ *— ортонормированный базис,* $x_1, ..., x_n$, $dx_1, ..., dx_n$ *— соответствующие координаты в* $\mathbb{R}^n$ *и в касательных пространствах. Тогда*

$$df = D_1 f dx_1 + ... + D_n f dx_n = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n.$$

Другими словами:

$$df(x;\xi) = D_1 f(x)\xi^1 + ... + D_n f(x)\xi^n.$$

8.7. Частные производные и непрерывность

Функция, имеющая частные производные во всех точках, может не быть непрерывной (приведите пример).

Функция, имеющая дифференциал в каждой точке, называется дифференцируемой.

***Теорема* 8.3.** *Дифференцируемая функция непрерывна.*

8.8. Достаточное условие дифференцируемости

***Теорема* 8.4.** *Функция, имеющая непрерывные частные производные, дифференцируема.*

Лекция 9. Градиент. Старшие производные

9.1. Норма линейного функционала

Норма линейного функционала определена, если линейное пространство наделено дополнительной структурой: скалярным произведением, или, в более общем случае, нормой. Пусть $\mathbb{R}^n$ — евклидово пространство, $|x| = \sqrt{(x,x)}$ — соответствующая норма.

Определение 27. *Нормой* линейного функционала l называется

$$\|l\| = \frac{\sup_{x\neq 0} |l(x)|}{|x|}$$

9.2. Градиент

Определение 28. Градиент функции — это вектор, скалярное произведение на который дает дифференциал функции:

$$df(x;\xi) = (\operatorname{grad} f(x), \xi).$$

***Теорема* 9.1.** *Всякий линейный функционал в $\mathbb{R}^n$ есть скалярное произведение на некоторый вектор.*

В ортонормированном базисе

$$(\operatorname{grad} f)(x) = (D_1 f(x), ..., D_n f(x)). \tag{3.1}$$

***Следствие* 9.2.** *Норма дифференциала равна модулю градиента.*

Задача 9.3. Градиент задает направление наибыстрейшего роста функции.

9.3. Теорема о конечном приращении

Это — аналог теоремы о среднем в одномерном анализе.

***Теорема* 9.4.** *Пусть f — дифференцируемая функция в выпуклой области, и $\|df\| \leqslant L$. Тогда $|f(x+h) - f(x)| \leqslant L|h|$.*

9.4. Необходимое условие наличия экстремума

***Теорема* 9.5.** *C^1-гладкая функция в открытой области имеет экстремум только в тех точках, где ее дифференциал равен нулю.*

Докажите, что обратное неверно.

9.5. Старшие производные

Фиксируем координаты в $\mathbb{R}^n$. Частные производные первого порядка от функции f — это $D_j f$. Определим по индукции частную производную порядка m как результат m-кратного применения операторов D_j, взятых в произвольном порядке.

9.6. Теорема о равенстве смешанных производных

Теорема 9.6. *На функциях с непрерывными вторыми частными производными, операторы D_i, D_j коммутируют:*

$$D_j D_i f = D_i D_j f. \tag{3.2}$$

Доказательство. Достаточно доказать теорему для функции двух переменных и операторов D_1 и D_2. Фиксируем точку (x, y). Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(h_1, h_2) = f(x + h_1, y + h_2) - f(x + h_1, y) - f(x, y + h_2) + f(x, y).$$

Мы докажем, что

$$F(h_1, h_2) = D_1 D_2(x) h_1 h_2 + o(h_1 h_2) = D_2 D_1 f(x) h_1 h_2 + o(h_1 h_2). \tag{3.3}$$

Отсюда следует (3.2).

Докажем (3.3). Рассмотрим два выражения для функции F, использущие формулу Нmютона-Лейбница; в одном интегрирование происходит по вертикальным отрезкам, в другом — по горизонтальным. Равенство этих двух выражений даст формулу (3.3).

$$F(h_1, h_2) = [f(x + h_1, y + h_2) - f(x, y + h_2)] - [f(x + h_1, y) - f(x, y)] = \int_0^{h_1} D_1 f(x + t_1, y + h_2) dt_1 - \int_0^{h_1} D_1 f(x + t_1, y) dt_1 = \int_0^{h_1} [D_1 f(x + t_1, y + h_2) - D_1 f(x + t_1 y)] dt_1.$$

Выражение под интегралом по теореме о среднем имеет вид:

$$F(h_1, h_2) = D_2 D_1 f(x + t_1, y + \theta(t_1)) \cdot h_2 = D_2 D_1 f(x, y) h_2 + o(1) h_2, \theta(t_1) \in [0, h_2]$$

в силу непрерывности вторых частных производных. Весь интеграл равен

$$F(h_1, h_2) = D_2 D_1 f(x, y) h_1 h_2 + o(1) h_1 h_2.$$

Представление функции F в виде

$$F(h_1, h_2) = [y f(x + h_1, y + h_2) - f(x + h_1, y)] - [f(x, y + h_2) - f(x,)]$$

с помощью аналогичных рассуждений дает:

$$F(h_1, h_2) = D_2 D_1 f(x, y) h_1 h_2 + o(1) h_1 h_2.$$

Это доказывает утверждение (3.3), а с ним и всю теорему. □

Лекция 10. Формула Тейлора и ее приложения

10.1. Мультииндексные обзначения

$$x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$$

$$k = (k_1, ..., k_n) \in \mathbb{Z}_+^n$$

$$|x|^2 = (x, x)$$

$$|k| = k_1 + ... + k_n$$

$$x^k = x_1^{k_1} ... x_n^n$$

$$D^k = D_1^{k_1} ... D_n^{k_n}$$

$$k! = k_1! ... k_n!$$

Примеры. $\sum_{|k| \leq N} a_k x^k$ — многочлен степени $\leq N$ от n переменных.

$D^k f,\ |k| = N$ — частная производная от f порядка N:

$$D^k f = D_1^{k_1} ... D_n^{k_n} f.$$

10.2. Формула Тейлора

Задача 10.1. Найти наилучшее возможное приближение функции f вблизи фиксированной точки x многочленом n-й степени $T(h) = N_N(x; h)$:

$$f(x + h) - T(h) = R(h), \tag{3.4}$$

остаток R мал. Требование малости:

$$D^k R = 0 \text{ при } |k| \leqslant N. \tag{3.5}$$

***Замечание* 4** (Важное замечание)**.**

$$D^m x^k|_{x=0} = \delta_{mk} k!$$

***Следствие* 10.2.**

$$(3.4), (3.5) \Rightarrow T = \sum a_k x^k,\ a_k \cdot k! = D^k f(x).$$

Формула Тейлора.

$$f(x + h) = \sum_{|k| \leq N} \frac{f^k(x)}{k!} h^k + R(h),$$

причем выполнено (3.5).

10.3. Оценка остатка

***Теорема* 10.3.** *Формула* (3.5) *влечет:*

$$|R(h)| = o(|h|^N).$$

10.4. Необходимое условие наличия экстремума

Теорема 10.4. *C^1-згладкая функция в открытой области имеет экстремум только в тех точках, где ее дифференциал равен нулю.*

Докажите, что обратное неверно.

Точки, где дифференциал функции равен нулю, называются критическими точками этой функции. Значения функции в критических точках называются критическими значениями этой функции.

10.5. Второй дифференциал

Локальное поведение функции в окрестности критической точки часто описывается ее вторым дифференциалом (гессианом) в этой точке. Это — однородный многочлен второй степени на касательном пространстве в критической точке, который совпадает с тейлоровским многочленом степени 2 минус свободный член в этой точке. Второй дифференциал функции в критической точке называется невырожденным, если соответствующий гессиан не имеет нулевых собственных значений.

10.6. Достаточное условие наличия экстремума

Теорема 10.5. *Пусть C^2-гладкая функция в открытой области имеет критическую точку, в которой гессиан — положительно (отрицателно) определённая квадратичная форма. Тогда в этой точке функция имеет локальный минимум (максимум).*

10.7. Лемма Морса

Лемма 10.6 (Морса)**.** *Достаточно гладкая функция с невырожденным гессианом в критической точке дважды гладкой заменой координат в окрестности этой точки превращается в ее гессиан плюс свободный член.*

Соответствующая критическая точка называется невырожденной.

Лемма Морса будет доказана в 4-м модуле для аналитических функций.

10.8. Поверхности уровня

Следствие 10.7. *Поверхности уровня C^3-функции в окрестности невырожденной критической точки в $\mathbb{R}^3$ — эллипсоиды, гиперболоиды, конусы (в подходящей системе координат).*

При переходе через критическое значение функции топология ее поверхности уровня может измениться: неодносвязный однополостный гиперболоид превращается в односвязный двуполостный и наоборот.

На этом основана теория Морса.

Лекция 11. Дифференциал отображения

11.1. Определение дифференциала

Дифференциал отображения — это главная линейная часть приращения. Формальное определение таково:

Определение 29. Дифференциал в точке x отображения $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ — это линейный оператор

$$df(x) = A : T_x\mathbb{R}^n \to T_{f(x)}\mathbb{R}^m$$

такой, что

$$f(x+h) - f(x) = Ah + o(h) \text{ при } h \to 0.$$

11.2. Якобиева матрица и якобиан

Если в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ выбраны базисы $e_1, ..., e_n$ то возникают соответствующие базисы и координаты во всех касательных пространствах, а также координаты $x_1, ..., x_n$ и $y_1, ..., y_m$ в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$. В этих координатах

$$f(x) = (f_1(x_1, ..., x_n), ..., f_m(x_1, ..., x_n)) \tag{3.6}$$

$$df(x) = (a_{ij});\ a_{ij} = D_j f_i(x) = \frac{\varphi f_i}{\varphi x_j}(x). \tag{3.7}$$

Определение 30. Матрица (3.7) называется матрицей Якоби, а ее определитель (определенный, когда $m = n$) — якобианом. Обозначения:

$$\det df(x) = J(x) = \frac{\varphi y}{\varphi x} = \frac{\varphi(y_1, ..., y_n)}{\varphi(x_1, ..., x_n)}$$

В общем случае матрица Якоби отображения (3.6) имеет m строк и n столбцов.

***Теорема* 11.1.** *Пусть в пространствах $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ выбраны координаты, и отображение $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ задается непрерывно дифференцируемыми функциями* (3.6). *Тогда дифференциал отображения f существует, и в координатах $dx = dx_1, ..., dx_n; dy_1, ..., dy_m$ задается якобиевой матрицей* (3.7).

11.3. Критические точки

Определение 31. Точка называется *критической* для отображения $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, если в ней якобиан равен нулю.

Определение 32. *Рангом* отображения f в точке x называется ранг дифференциала $df(x)$.

Примеры. Найти дифференциалы и критические точки отображений:
1.$f = id$ 2.$f = Ax$ 3.$f(x, y)(x, y^2)$

Определение 33. Диффеоморфизмом называется биективное отображение, дифференцируемое (класса C^1) вместе с обратным.

11.4. Норма линейного оператора

Пусть $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ — евклидовы пространства, $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ — линейный оператор.

Определение 34. *Норма* A определяется равенством:

$$\|A\| = \max_{|x|=1} |Ax|.$$

***Теорема* 11.2.** *Норма линейного оператора в конечномерном евклидовом пространстве всегда существует.*

11.5. Теорема о конечном приращении

***Теорема* 11.3.** *Пусть f — C^1-отображение выпуклой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$. Тогда $\forall x, y \in \Omega$,*

$$|f(y) - f(x)| \leqslant \max_{[x,y]} \|df\| \cdot |y - x|.$$

***Следствие* 11.4.** *Дифференцируемое отображение непрерывно.*

11.6. Теорема о дифференцировании сложной функции

***Теорема* 11.5.**

$$d(f \circ g)(x) = df(g(x)) \circ dg(x).$$

Лекция 12. Метрические пространства

12.1. Определение

Определение 35. *Метрикой* на множестве X называется отображение $\rho\colon X \times X \to \mathbb{R}^+$, удовлетворяющее следующим аксиомам:

рефлексивность: $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
симметричность: $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;
неравенство треугольника: $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z)$.

Метрическим пространством называется множество с определенной на нем метрикой.

12.2. Примеры

Дискретные пространства Для любого множества X положим: $\rho \equiv 1$ на $X \times X \ \Delta$, где Δ — диагональ прямого произведения.

***Предложение* 12.1.** *Эта метрика удовлетворяет определению 35.*

Евклидовы пространства Для любого пространства $\mathbb{R}^n$ со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$ положим:

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x - y, x - y)}. \tag{3.8}$$

***Предложение* 12.2.** *Метрика* (3.8) *удовлетворяет определению 35.*

Функциональные пространства На множестве $C_{[a,b]}$ непрерывных функций на отрезке $[a, b]$ определим метрику равенством:

$$\rho(f, g) = \max_{[a,b]}[f - g]. \tag{3.9}$$

***Предложение* 12.3.** *Метрика* (3.9) *удовлетворяет определению 35.*

12.3. Нормированные пространства

Определение 36. *Нормой* на линейном пространстве L назывется функция $n\colon L \to \mathbb{R}^+$, удовлетворяющая следующим аксиомам:

положительность: $n(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
полулинейность: $n(\lambda x) = |\lambda| n(x)$;
неравенство треугольника: $n(x + y) \leqslant n(x) + n(y)$.

Обозначение: $n(x) = |x|$ (норма — аналог длины).

***Предложение* 12.4.** *Всякое линейное нормированное пространство является метрическим с метрикой* $\rho(x, y) = |x - y|$.

12.4. Примеры

Пространство l_2 — это пространство последовательностей

$$l_2 = \left\{ x \in \mathbb{R}^\infty \,\middle|\, x = (x_j) = x_1, ..., x_j, ... \ \sum x_j^2 < \infty \right\}$$

с нормой

$$|x|^2 = \sum x_j^2.$$

Проверяем аксиомы. Первыве две выполняются тривиально. Неравенство треугольника выполняется для конечных последовательностей (с хвостом из нулей), следовательно выполняется для бесконечных (переход к пределу под знаком неравенства).

Пространство l_∞ — это пространство ограниченных последовательностей

$$l_\infty = \left\{ x \in \mathbb{R}^\infty \,\middle|\, x = (x_j) = x_1, ..., x_j, ... \quad \sup |x_j| < \infty \right\}$$

с нормой

$$|x| = \sup |x_j|.$$

Докажите, что l_∞ — нормированное пространство.

12.5. Полнота

Определение 37. Последовательность (x_n) *фундаментальна* (Коши), если $\forall \varepsilon \exists N : \forall k, l > N,\ \rho(x_k, x_l) < \varepsilon$.

***Предложение* 12.5.** *Всякая сходящаяся последовательность в метрическом пространстве фундаментальна.*

Упражнение: докажите!

Определение 38. Метрическое пространство *полно*, если в нём любая фундаментальная последовательность сходится.

Докажите, что l_2 и l_∞ — полные пространства.

Лекции 13–14. Открытые и замкнутые множества. Теорема о пополнении

13–14.1. Изометрии

Определение 39. Отображение $f\colon X \to Y$ метрических пространств X и Y с метрикой ρ_X, ρ_Y называется *изометрией*, если f — биекция, сохраняющая расстояние (метрику):

$$\rho_Y(f(x), f(y)) = \rho_X(x, y).$$

Определение 40. Отображение $f\colon X \to Y$ называется *изометричным вложением*, если $f\colon X \to f(X)$ — изометрия.

Упражнение. Существует ли изометричное вложение пространства $S_n : \{1, \dots, n\}$, $\rho(i,j) = 1 - \delta_{ij}$ в пространство $\mathbb{R}^m$ при каком-либо m?

***Замечание* 5.** *В алгебре доказано, что все евклидовы пространства одинаковой размерности изометричны. Следовательно, двумерная плоскость в Евклидовом пространстве — та самая, которая изучается в школе. Поэтому неравенство треугольника в $\mathbb{R}^n$ — факт из элементарной геометрии.*

13–14.2. Замкнутые и открытые множества

Следующие определения почти дословно повторяют определения из топологии прямой.

Определение 41. *ε-окрестностью* точки x метрического пространства X называется множество

$$B(x, \varepsilon) = \{y \in X | |y - x| < \varepsilon\}.$$

Оно же называется *ε-шаром* или *шаром радиуса ε с центром x*.

Определение 42. *Открытым множеством* в метрическом пространстве называется множество, которое вместе с каждой точкой содержит некоторый шар с центром в этой точке.

Определение 43. *Замкнутое множество* — дополнительное к открытому.

13–14.3. Сходимость. Предельные точки

Определение 44. Последовательность (x_n) сходится к x:

$$x_n \to x,$$

если $\rho(x_n, x) \to 0$.

Определение 45. Точка $x \in X$ множества называется предельной для множества $A \subset X$, если существует последовательность $(a_n) \subset A$, сходящаяся к x.

***Теорема* 13–14.1.** *Замкнутые множества — это те и только те, которые содержат все свои предельные точки.*

13–14.4. Ещё о полноте

Напоминание.

Определение 46. Последовательность (x_n) *фундаментальна* (Коши), если $\forall\varepsilon\exists N : \forall k, l > N,\ \rho(x_k, x_l) < \varepsilon$.

Определение 47. Метрическое пространство *полно*, если в нем любая фундаментальная последовательность сходится.

***Теорема* 13–14.2.** *Декартово произведение $Z = X \times Y$ полных пространств X, Y с Пифагоровой метрикой полно:*

$$\rho_Z^2((x,y),(x',y')) = \rho_X^2(x,x') + \rho_Y^2(y,y').$$

***Теорема* 13–14.3.** *Евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ полно для любого n.*

***Теорема* 13–14.4.** *Замкнутое подмножество полного метрического пространства с индуцированной метрикой полно.*

***Замечание* 6.** *Именно такие полные пространства чаще всего используются в доказательстве разнообразных теорем существования.*

13–14.5. Теорема о пополнении

***Теорема* 13–14.5.** *Для каждого метрического пространства существует его пополнение. Это значит, что для каждого метрического пространства X с метрикой d существует пространство $\tilde{X}$ с метрикой $\tilde{d}$ и вложение $i\colon X \to \tilde{X}$ такие, что*
a $\tilde{X}$ полно;
b $\tilde{d}(i(x), i(y)) = d(x,y)$;
c $\tilde{X}$ совпадает с замыканием X (говорят, что X плотно в $\tilde{X}$).
Любые два пополнения одного и того же пространства изометричны.

Пример 3. Вещественная ось — пополнение пространства рациональных чисел с метрикой $d(x,y) = |x-y|$.

13–14.6. Словарь: построение вещественных чисел — теорема о пополнении

Рациональные числа — метрическое пространство X.

Вещественные числа — пополнение $\tilde{X}$ пространства X.

Сходимость фундаментальной последовательности рациональных чисел к вещественному числу, которое она представляет — лемма о замкнутости.

Критерий Коши — лемма о полноте.

13–14.7. Доказательство теоремы о пополнении

Как и выше, X — мерическое пространство, $\tilde{X}$ — его пополнение. Оно состоит из всех классов эквивалентных фундаментальных последовательностей (a_n) в X; пишем $x = (a_n)$. Метрика в пространстве $\tilde{X}$ задается равенством

$$\rho_{\tilde{X}}((a_n),(b_n)) = \lim \rho_X(a_n, b_n).$$

Из критерия Коши для вещественных чисел следует, что она определена корректно.

***Лемма* 13–14.6** (о плотности (или о замыкании))**.** *Пространство $\tilde{X}$ является замыканием пространства X, или, что то же самое, X плотно в $\tilde{X}$. Другими словами, для любой точки $x \in \tilde{X}$ существует последовательность (a_n) в X, такая что $x = \lim a_n$.*

***Лемма* 13–14.7** (о полноте)**.** *Пространство $\tilde{X}$ с введенной выше метрикой полно.*

Эти две леммы заканчивают доказательство теоремы о пополнении.

Лекция 15. Полнота C. Компактность

15.1. Полнота C

Определение 48. Последовательность функций $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ *равномерно сходится* к f:

$$f_n \rightrightarrows f,$$

если $\forall \varepsilon \exists N : \forall n > N$,

$$\max_{\Omega} |f - f_n| < \varepsilon.$$

***Замечание* 7.** *Равномерная сходимость непрерывных функций на Ω — то же, что сходимость в пространстве C_Ω.*

***Теорема* 15.1.** *Предел равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций, заданных на одной и той же области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, является непрерывной функцией.*

***Теорема* 15.2.** *Пространство C_Ω полно для любого $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.*

15.2. Определение компактности

Определение 49. Подмножество метрического пространства *компактно*, если в нем из любой последовательности можно извлечь подпоследовательность, которая сходится к элементу этого множества. Компактоное множество часто называют *компактом.*

***Теорема* 15.3.** *Замкнутое подмножество компакта — компакт*

15.3. Компактность отрезка

***Теорема* 15.4.** *Отрезок — компакт.*

15.4. Конечномерные примеры

***Теорема* 15.5.** *Декартово произведение $Z = X \times Y$ двух компактов X, Y с Пифагоровой метрикой — компакт:*

$$\rho_Z^2((x, y), (x', y')) = \rho_X^2(x, x') + \rho_Y^2(y, y').$$

***Теорема* 15.6.** *Куб в Евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ — компакт для любого n.*

***Теорема* 15.7.** *Замкнутое ограниченное подмножество Евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ — компакт.*

Задача 15.8. Докажите обратное.

15.5. Бесконечномерный пример: Гильбертов кирпич

Определение 50. Гильбертов кирпич — это подмножество пространства l_2 вида

$$H = \left\{ (x_j) \;\middle|\; |x_j| \leqslant 2^{-j} \right\}$$

***Теорема* 15.9.** *Гильбертов кирпич компактен.*

Задача 15.10. Докажите!

***Предложение* 15.11.** *Единичная сфера в пространстве l_∞ некомпактна.*

Задача 15.12. Единичная сфера в пространстве l_2 некомпактна.

Лекция 16. Принцип сжимающих отображений и теорема об обратном отображении

16.1. Принцип сжимающих отображений

Определение 51. Отображение Φ метрического пространства M в себя называется *сжимающим* (с коэффициентом $q < 1$), если

$$\rho(\Phi x, \Phi y) \le q\rho(x, y) \quad \forall x, y \in M. \tag{3.10}$$

***Теорема* 16.1** (Принцип сжимающих отображений)**.** *Сжимающее отображение метрического пространства в себя имеет неподвижную точку, и притом только одну.*

16.2. Пикаровские приближения

Для любого $x \in M$ последовательность $(\Phi^k x)_{k=0}^{\infty}$ сходится к $\operatorname{Fix}\Phi$ и называется *последовательностью Пикаровских приближений* к неподвижной точке $\operatorname{Fix}\Phi$.

Эти приближения бывают очень полезны.

16.3. Теорема об обратном отображении

***Теорема* 16.2.** *Пусть F — C^1-гладкое отображение n-мерных областей. Тогда в окрестности каждой своей некритической точки x отображение F имеет C^1-гладкое обратное отображение G, и производная обратного отображения обратна производной исходного:*

$$dG(x) = ((dF) \circ G(x))^{-1}. \tag{3.11}$$

Напомним, что некритическая точка отображения F это точка, в которой якобиан отображения F не равен нулю. Это условие часто включают в формулировку теоремы вместо некритичности точки x.

16.4. Сведения к задаче о неподвижной точке

Достаточно рассмотреть случай, когда $dF(x) = \mathrm{id}$. Действительно, пусть $dF(x) = A$. Тогда

$$F = A \circ F_0,\ dF_0(x) = E = \mathrm{id}\,.$$

Если C^1-гладкое отображение F_0^{-1} существует, то это верно и для F:

$$F^{-1} = F_0^{-1} \circ A^{-1}.$$

Итак, пусть $dF(x) = E$; положим для простоты $x = 0$. Тогда (x теперь произвольно):

$$F(x) = \mathrm{id} + f(x), f(x) = o(x) \tag{3.12}$$

при $x \to 0$. Более того,

$$\|df(x)\| \to 0 \text{при} x \to 0 \tag{3.13}$$

в силу непрерывности dF.

Ищем отображение G, обратное F, в виде

$$G = \mathrm{id} - g,\ g(x) = o(x)$$

при $x \to 0$. Имеем:

$$F \circ G = \mathrm{id},$$

или

$$(\mathrm{id} + f) \circ (\mathrm{id} - g) = \mathrm{id}\,.$$

Отсюда

$$\mathrm{id} - g + f_0 \circ (\mathrm{id} - g) = \mathrm{id}\,.$$

Следовательно,

$$g = f \circ (\mathrm{id} - g). \tag{3.14}$$

Рассмотрим отображение:

$$\Phi\colon g \mapsto f \circ (\mathrm{id} - g).$$

Уравнение (3.14) означает, что g является неподвижной точкой отображения Φ. Она будет найдена с помощью принципа сжимающих отображений. Чтобы его применить, нужно сделать три шага:

- выбрать подходящее метрическое пространство M и доказать его полноту;
- убедиться, что Φ отображает M в себя;
- доказать, что Φ на M сжимает.

16.5. Выбор функционального пространства

Из (3.12), (3.13) следует, что существует такой шар $B_R = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leqslant R \,\}$, что

$$\|df(x)\| \leq \frac{1}{2} \forall x \in B_R. \tag{3.15}$$

Пусть $r = \frac{R}{2}$. Рассмотрим пространство с метрикой C:

$$M = \{\, g\colon B_r \to \mathbb{R}^n \mid g(0) = 0, |g(x)| \leq |x| \,\} \tag{3.16}$$

***Лемма* 16.3.** *Пространство M, определенное формулой* (3.16)*, полно в C.*

16.6. Отображение в себя

Оператор Φ:

$$g \mapsto f \circ (\mathrm{id} - g) \tag{3.17}$$

называется *оператором сдвига аргумента.* Чтобы отображение $f \circ (\mathrm{id} - g)$ было определено в точке x, нужно, чтобы $x - g(x)$ находилось в области определения отображения f. Это требование выполнено, если f определено в B_R, $x \in B_r$, $r = \frac{R}{2}$, и $|g(x)| \leq |x|$. Это рассуждение составляет часть доказательства следующей леммы

***Лемма* 16.4.** *Оператор сдвига аргумента* (3.17) *отображает пространство M в себя.*

16.7. Сжатие

Лемма 16.5. *Оператор* $\Phi\colon M \to M$ *является сжимающим в метрике* C.

Применяя принцип сжимающих отображений, получаем: уравнение (3.14) имеет единственное решение $g \in M$. Следовательно, отображение $G = \mathrm{id} - g$ является обратным к F. Тем самым, мы доказали, что F локальная биекция. Но отображение g только непрерывно, а нам нужно C^1-гладкое!

Здесь вступает в силу следующий важный принцип «регулярности неподвижной точки»: неподвижная точка сжимающего оператора зачастую обладает лучшими свойствами, чем «большинство» точек соответствующего функционального пространства.

Лекция 17. Теорема о неявной функции

17.1. Неподвижная точка сама себя сгладит: класс C^1

***Лемма* 17.1.** *Решение функционального уравнения из прошлой лекции*

$$g = f \circ (id - g).$$

дифференцируемо в нуле, и $dg(0) = 0$.

Доказательство следует из соотношения

$$f(x - g(x)) = o(x) \text{ при } x \to 0.$$

Это доказывает, что

$$dG(0) = E.$$

Переходя от случая $dF(0) = E$ к $dF(0) = A$ и пользуясь тем, что точки, близкие к некритическим, — некритические, получаем:

$$dG(F(0)) = A^{-1},$$

$$dG(x) = (dF \circ G(x))^{-1}. \tag{3.18}$$

Формула (3.18) доказывает не только дифференцируемость, но и непрерывную дифференцируемость G.

17.2. Старшие производные

***Теорема* 17.2.** *Если в условиях теоремы об обратном отображении отображение F — класса C^N, то и обратное отображение G — тоже класса C^N.*

Доказательство подобно «вытягиванию себя за волосы». Оно проводится индукцией по N.

База индукции: $N = 1$. Это — сама теорема об обратном отображении.

Шаг индукции: пусть отображение G (а, следовательно, и $g = id_G$)--класса C^N. Тогда в формуле

$$dG = (dF \circ G)^{-1},$$

правая часть — класса C^N, поскольку dF класса C^N и, G класса C^N по предположению индукции. Следовательно, и левая часть — класса C^N. Но это и значит, что G — класса C^{N+1}.

Снова сработал принцип регулярности неподвижной точки!

17.3. Теорема о неявной функции в случае двух переменных

Еще об обозначениях: когда переменные занумерованы, $x = (x_1, ..., x_n)$, мы обозначаем соответствующие операторы дифференцирования: $D_1, ..., D_n$ (старое обозначение). Когда они поименованы, например (x, y), мы пишем: D_x, D_y вместо D_1, D_2. Обозначения для старших производных сохраняются как были.

***Теорема* 17.3.** *Пусть f — C^1-гладкая функция в области на плоскости. Тогда ее множество уровня, проходящее через некритическую точку — это C^1 гладкая кривая, задаваемая уравнением $y = \varphi(x)$ или $x = \psi(y)$.*

Добавление. Пусть a — некритическая точка, и $D_y f(a) \neq 0$. Тогда множество

$$M_a = \{(x,y) | f(x,y) = a\} \tag{3.19}$$

вблизи точки a имеет вид:

$$y = \varphi(x), \ \varphi \in C^1.$$

При этом:

$$\varphi'(x) = -\frac{D_x f}{D_y f}(x, \varphi(x))$$

Эта формула доказывается дифференцированием тождества $f(x, \varphi(x)) \equiv 0$. Аналогично выводятся формулы для старших производных.

Задача 17.4 (на лекции не рассказывалась)**.** Найти вторую производную неявной функции.

Ответ. $\varphi''(x) = -\frac{D^{2,0}f - 2D^{1,1}f\frac{D_x f}{D_y f} + D^{0,2}f(\frac{D_x f}{D_y f})^2}{D_y f}(x, \varphi(x))$.

17.4. Сведение к теореме об обратном отображении

Пусть $D_y f(a) \neq 0$. Рассмотрим отображение

$$F \colon (x,y) \mapsto (x, f(x,y)) = (X, Y). \tag{3.20}$$

Имеем:

$$dF(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & D_y f(a) \end{pmatrix}$$

Якобиан $J(a) \neq 0$. Следовательно, существует C^1-гладкое обратное отображение G, определенное в окрестности точки $F(a)$. Множество $f = 0$ при отображении F переходит в прямую $L : X_2 = 0$. Следовательно,

$$M_a = G(L).$$

Отображение G тождественно по первой координате:

$$G(X,Y) = (X, g(X,Y)), \ g \in C^1.$$

Следовательно,

$$G(L) = \{(X, g(X, 0))\}.$$

Но $x = X$. Получаем:

$$\varphi(x) = g(x, 0). \tag{3.21}$$

Лекция 18. Вложенные подмногообразия и нормальные формы

18.1. Пикаровские приближения

Этот термин относится к принципу сжимающих отображений. Последовательность образов произвольной точки под действием сжимающего отображения (которая, как было доказано, сходится к неподвижной точке этого отображения) называется *последовательностью пикаровских приближений* к неподвижной точке.

18.2. Почленное интегрирование

***Теорема* 18.1.** *Пусть последовательность непрерывных функций равномерно сходится на отрезке, и пусть последовательность их первообразных сходится в одной точке. Тогда последовательность этих первообразных равномерно сходится на том же отрезке.*

18.3. Почленное дифференцирование

***Теорема* 18.2** (Вейерштрасс)**.** *Пусть последовательность непрерывных производных дифференцируемых функций равномерно сходится на отрезке, и пусть последовательность самих функций сходится в одной точке. Тогда последовательность функций сходится равномерно, и производная предела равна пределу производных.*

***Теорема* 18.3.** *Пусть последовательность функций и всех их непрерывных частных производных до порядка N сходится равномерно на открытой области пространства $\mathbb{R}^n$. Тогда производные пределов до порядка N равны пределам соответствующих производных.*

Теорема 18.2 немедленно следует из теоремы 18.1. Теорема 18.3 выводится из теоремы 18.2 индукцией по N.

18.4. Пространство C^k

Определение 52. Пространство $C^k_{[a,b]}$ — это пространство k раз непрерывно дифференцируемых функций на отрезке $[a,b]$ с метрикой

$$\rho(f,g) = \sum_1^k \max_{[a,b]} |f^{(j)} - g^{(j)}|.$$

Определение 53. Пространство C^N_Ω — это пространство k раз непрерывно дифференцируемых функций на области Ω, с метрикой

$$\rho(f,g) = \sum_{|k|=1}^N \max_{\Omega} |D^k f - D^k g|.$$

***Теорема* 18.4.** *Для любых N и Ω, пространство C^N_Ω полно.*

Материал последних трех разделов разбирался на упражнениях.

18.5. Теорема о неявной, многомерный случай

***Теорема* 18.5.** *Пусть f — C^1-гладкое отображение области пространства $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$, $m \leq n$. Тогда в окрестности каждой точки a, в которой*

$$rk\ df(a) = m,$$

множество

$$M_a = \{x \in \mathbb{R}^n | f(x) = f(a)\}$$

локально задается в виде графика C^1-гладкого отображения некоторого координатного пространства $\mathbb{R}^{n-m}$ вв дополнительное пространство $\mathbb{R}^m$.

Доказательство. Рассмотрим ненулевой минор якобиевой матрицы $df(a)$. Перенумеруем переменные

$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x, y) = (x_1, \ldots, x_{n-m}, y_1, \ldots, y_m)$$

так, что

$$\det \frac{\partial f}{\partial y}(a) \neq 0.$$

Рассмотрим отображение

$$(x, y) \mapsto (X, Y) = (x, f(x, y)).$$

Дальнейшие рассуждения — как в доказательстве теоремы о неявной для функции двух переменных. □

18.6. Старшие производные

***Теорема* 18.6.** *Если в условиях предыдущей теоремы $f \in C^N$, то и $\varphi \in C^N$.*

Доказательство. Это следует из теоремы о C^N-гладкости обратного отображения. □

18.7. Одномерные подмногообразия

Определение 54. *Одномерным C^N-подмногообразием* координатной плоскости называется множество, которое в окрестности каждой точки задается как график C^N-отображения одной из координатных осей (выбор которой может зависеть от точки) в другую.

***Следствие* 18.7** (из теоремы 18.6)**.** *Некритическое (т.е. не содержащее критических точек) множество уровня C^N-гладкой функции на плоскости является одномерным C^N-подмногообразием.*

18.8. Вложенные подмногообразия

Определение 55. *m-мерным C^N-подмногообразием* координатного пространства $\mathbb{R}^N$ называется множество, которое в окрестности каждой своей точки задается как график C^N-отображения зависящей от точки координатной плоскости $\mathbb{R}^{n-m}$ в дополнительную координатную плоскость $\mathbb{R}^m$.

Определение 56. *Критической точкой* отображения $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $m \leq n$, называется точка, в которой $\operatorname{rk} df < m$. Множество уровня отображения f назавется *некритическим*, если оно не содержит критических точек, и *критическим* в противном случае.

***Следствие* 18.8** (из теоремы 18.6). *Некритическое множество уровня C^N-отображения из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$ (то есть множество уровня, во всех точках которого ранг отображения равен m), является m-мерным C^N-подмногообразием $\mathbb{R}^n$.*

Лекции 19–20. Нормальные формы, локальный и условный экстремумы

19–20.1. Теорема о неявной, многомерный случай

Повторение; комментарий.

19–20.2. Нормальные формы функций вблизи некритических точек

Нет функций, кроме линейных, в окрестности некритических точек.

***Теорема* 19–20.1.** *C^N-отображение из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^1$ в окрестности некритической точки выбором C^N-координат в прообразе превращается в проектирование на координатную ось: $(x_1, ..., x_n) \mapsto x_1$.*

***Следствие* 19–20.2.** *Поверхность уровня C^N-функции из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^1$ в окрестности некритической точки выбором C^N-координат вв прообразе превращается в гиперплоскость $x_1 = 0$.*

19–20.3. Нормальные формы отображений вблизи некритических точек

***Теорема* 19–20.3.** *C^N-отображение из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$ в окрестности некритической точки выбором C^N-координат в прообразе превращается в проектирование на координатную плоскость: $(x_1, ..., x_n) \mapsto (x_1, ..., x_m)$.*

***Следствие* 19–20.4.** *Поверхность уровня C^N-отображения $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$ в окрестности некритической точки выбором C^N-координат в прообразе превращается в плоскость $x_1 = ... = x_m = 0$.*

19–20.4. Необходимое условие локального экстремума (напоминание)

***Теорема* 19–20.5.** *Пусть C^1-функция f имеет локальный экстремум в некоторой внутренней точке области определения. Тогда эта точка — критическая: дифференциал функции в этой точке равен нулю.*

19–20.5. Достаточное условие локального экстремума

Определение 57. *Вторым дифференциалом* функции в точке называется однородная квадратичная часть ее тейлоровского многочлена степени 2. Обозначение: $d^2f(a)$. Второй дифференциал называется также *гессианом.*

***Теорема* 19–20.6.** *Пусть второй дифференциал C^2-функции f в критической точке является положительно (или отрицательно) определенной квадратичной формой. Тогда эта точка является локальным минимумом (соответственно, локальным максимумом) функции f.*

19–20.6. Условный экстремум функции на гиперповерхности (необходимое условие)

Рассмотрим C^1-функцию f и гладкую поверхность Γ в $\mathbb{R}^n$.

Определение 58. *Условным экстремумом* функции f на Γ называется локальный экстремум ограничения $f|_\Gamma$.

***Замечание* 8.** *Условный экстремум функции f на Γ может приниматься в некритической точке функции. Пример: функция x на единичной окружности принимает максимум в точке* $(1,0)$.

Рассмотрим сначала простейший случай.

***Теорема* 19–20.7** (необходимое условие локального экстремума на гиперповерхности)**.** *Пусть a — некритическая точка для C^1-функций f и g, и пусть a — экстремум для ограничения f на поверхность уровня функции g, проходящую через a. Тогда дифференциалы функций f и g в точке a линейно зависимы: существует такое λ что*

$$df_a + \lambda dg_a = 0.$$

Коэффициент λ в этом равенстве называется *множителем Лагранжа.*

Доказательство. Воспользуемся теорией нормальных форм. Эта теория позволяет исследовать инвариантно заданные объекты в наиболее удобной системе координат.

Выберем наши координаты так, чтобы функция g превратилась в первую координату x_1 . Это возможно по теореме 19–20.1. Тогда дифференциал функции g примет вид $dg = dx_1$.

С другой стороны, в точке условного экстремума (пусть это будет начало координат) дифференциал функции $f(0, x_2, ..., x_n) = h(x_2, ..., x_n)$ обращается в 0. Следовательно

$$df(0) = D_1f(0)dx_1 + D_2f(0)dx_2 + ... + D_nf(0)dx_n = D_1f(0)dx_1 + dh(0) = D_1f(0)dx_1.$$

Следовательно, дифференциалы функций f и g в точке 0 пропорциональны. Это доказывает теорему. □

***Замечание* 9.** *Множитель Лагранжа в точке 0 равен $D_1f(0)$. Отметим, что эта производная вычисляется в нормализущих, а не в исходных координатах.*

19–20.7. Условный экстремум функции на поверхности произвольной размерности (необходимое условие)

Названный в заглавии условный экстремум исследуется так же, как в случае гиперповерхностей, с минимальными изменениями.

***Теорема* 19–20.8** (необходимое условие локального экстремума на поверхности, общий случай)**.** *Пусть a — некритическая точка для C^1-функции f и C^1-отображения $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, и пусть a — экстремум для ограничения f на поверхность уровня отображения g, проходящую через a. Пусть отображение g задано функциями $g_1, ..., g_m$. Тогда дифференциалы функций f и $g_1, ..., g_m$ в точке a линейно зависимы: существуют такие λ_j что*

$$df_a + \sum \lambda_j dg_j(a) = 0.$$

Коэффициенты λ_j в этом равенстве называются *множителями Лагранжа.*

Доказательство. Воспользуемся снова теорией нормальных форм.

Выберем наши координаты так, чтобы функции g превратилась в первые m координат: $g_1 = x_1, ..., g_m = x_m$. Это возможно по теореме 19–20.3. Тогда дифференциал функции g_j примет вид $dg_j = dx_j$.

С другой стороны, в точке условного экстремума (пусть это будет начало координат) дифференциал функции $f(0, ..., 0, x_{m+1}, ..., x_n) = h(x_{m+1}, ..., x_n)$ обращается в 0. Следовательно

$$
\begin{gathered}
df(0) = D_1 f(0)dx_1 + ... + D_m f(0)dx_m + D_{m+1} f(0)dx_{m+1} + ... + D_n f(0)dx_n = \\
D_1 f(0)dx_1 + ...D_m f(0)dx_m + dh(0) = D_1 f(0)dx_1 + ...D_m f(0)dx_m.
\end{gathered}
$$

Следовательно, дифференциалы функций f и g_j в точке 0 пропорциональны. Это доказывает теорему. □

***Замечание* 10.** *Множители Лагранжа в точке* 0 *равны* $\lambda_j = D_j f(0)$. *Отметим, что эти производные вычисляются, как и выше, в нормализущих, а не в исходных координатах.*

19–20.8. Достаточные условия наличия условного экстремума

Пример 4. Положительно определенная квадратичная форма $2x^2+y^2$ имеет на единичной окружности два локальных минимума и два локальных максимума.

Вывод: ограничение положительно определенной квадратичной формы на подмногообразие может иметь локальный максимум.

***Теорема* 19–20.9.** *Пусть гиперповерхность* Γ *задана уравнением* $g = 0$ *и точка* a *— некритическая для* g. *Пусть точка* a *— критическая для ограничения* $f|_\Gamma$, *но не для самой функции* f. *Пусть* λ *— соответствующий множитель Лагранжа:*

$$df_a + \lambda dg_a = 0.$$

Пусть гессиан функции $f + \lambda g$ *в точке* a *— положительно (отрицательно) определенная квадратичная форма. Тогда* a *— локальный минимум (максимум) для ограничения* $f|_\Gamma$.

Мы называем эту теорему *безусловным достаточным условием условного экстремума.*

***Теорема* 19–20.10.** *Пусть выполнены все условия предыдущей теоремы, кроме последнего. Пусть ограничение гессиана функции* $f+\lambda g$ *в точке* a *на касательную плоскость* $T_a\Gamma$ *— положительно (отрицательно) определенная квадратичная форма. Тогда* a *— локальный минимум (максимум) для ограничения* $f|_\Gamma$.

Мы называем ее *условным достаточным условием условного экстремума.*

Теорема 19–20.9 следует из теоремы 19–20.10, но она легче, и потому доказана отдельно.

В условиях теоремы 19–20.10 сигнатура гессиана может быть либо $\pm n$, либо $\pm(n-2)$.

19–20.9. Множители Лагранжа

Критические точки ограничения $f|_\Gamma$ ищут обычно с помощью *множителей Лагранжа.* Заметим, что если линейная комбинация дифференциалов $df, dg_1, ..., dg_m$ обращается в ноль в точке a из Γ, то df входит в эту комбинацию с ненулевым коэффициентом. Это следует из того, что Γ — некритическое множество уровня отображения $g\colon \Gamma = g^{-1}(b)$, $b \in \mathbb{R}^m$.

Поставим следующие две задачи:

1. Для данного набора коэффициентов $\lambda_1, ..., \lambda_m$ найти все точки, в которых

$$dF_\lambda := df + \lambda_1 dg_1 + ... + \lambda_m dg_m = 0. \tag{3.22}$$

Получится множество точек

$$x = \varphi(\lambda),\ \lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_m).$$

2. Найти все значения λ, для которых точки $x(\lambda)$ принадлежат Γ.

Коэффициенты λ_j в левой части (3.22) называются *множителями Лагранжа.* При каждом фиксированном наборе λ система (3.22) представляет собой набор из n уравнений (равенство нулю коэффициентов при $dx_1, ..., dx_n$) с n неизвестными $x_1, ..., x_n$. Если гессиан функции F_0 в критической точке невырожден, эта система задает гладкую m-мерную поверхность вида $x = \varphi(\lambda)$. Доказательство этого утверждения входит в следующий листок. Это решает первую задачу.

Чтобы решить вторую задачу, нужно найти точку вида $x = \varphi(\lambda)$, принадлежащую Γ. Для этого нужно решить систему

$$(g \circ \varphi)(\lambda) = b.$$

В этой системе m уравнений для m компонент отображения g, и m неизвестных: $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_m)$. В общем случае, решения такой системы — изолированные точки.

19–20.10. Условные экстремумы в картинках

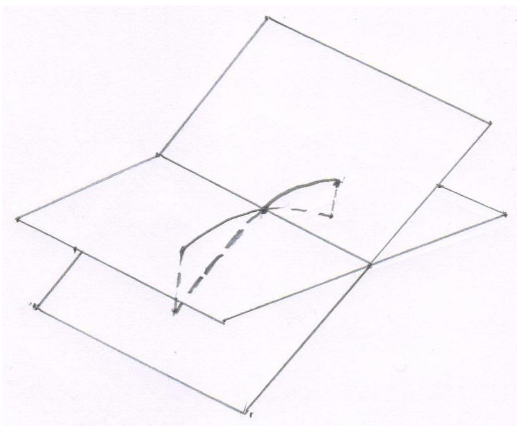

Рис. 3.1: Случай непропорциональных дифференциалов

19–20.11. Доказательство достаточных условий наличия условного экстремума

< ... >

19–20.12. Касательные плоскости к вложенным подмногообразиям

Определение 59. Касательный вектор к подмногообразию в точке — это предел направляющих векторов секущих, проведенных через эту точку, когда хорда стремится к нулю (если секущие выбраны так, что предел существует).

***Теорема* 19–20.11.** *Касательное пространство к поверхности уровня функции в некритической точке — это ядро ее дифференциала в этой точке. Градиент функции в некритической точке ортогонален ее поверхности уровня, проходящей через эту точку.*

Пример 5. Касательная к окружности перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания.

***Теорема* 19–20.12.** *Касательное пространство к поверхности уровня гладкого отображения $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ в его некритической точке — это ядро дифференциала отображения в этой точке.*

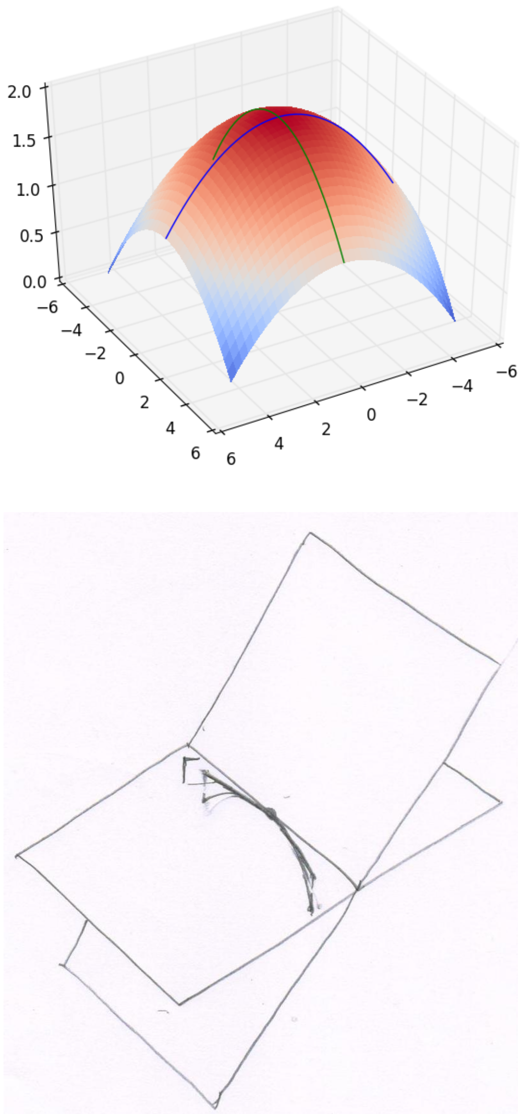

Рис. 3.2: Случай ненулевых пропорциональных дифференциалов а) условный минимум б) условный максимум

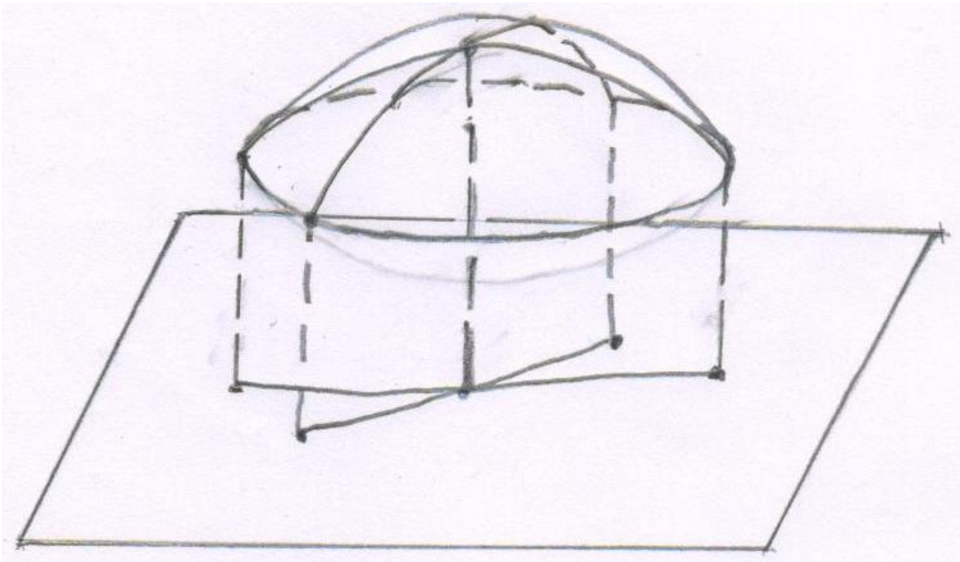

Рис. 3.3: Ограничение функции на гиперповерхность, проходящую через критическую точку: безусловный условный максимум

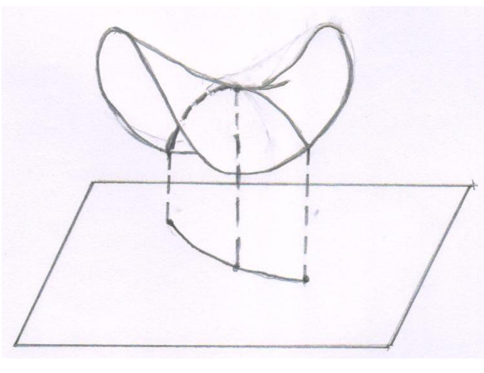

Рис. 3.4: Ограничение функции на гиперповерхность, проходящую через критическую точку: условный условный минимум и максимум

19–20.13. Еще о дифференцировании композиций

Рассмотрим композицию отображений: $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ и $g\colon \mathbb{R}^{n-m} \to \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-m} \oplus \mathbb{R}^m$, $x \mapsto (x, \varphi(x))$. Тогда

$$d(f \circ g) = D_x f \circ g + D_y f \circ g \cdot d\varphi.$$

19–20.14. Производная неявной функции

***Теорема* 19–20.13.** *Пусть a — некритическая точка отображения $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, (x, y) — координаты в $\mathbb{R}^n$, $x = (x_1, ..., x_{n-m})$, $y = (y_1, ..., y_m)$. Пусть*

$$\det D_y f(a) \neq 0.$$

Тогда

$$d\varphi = (D_y f)^{-1} D_x f. \tag{3.23}$$

19–20.15. Касательные плоскости к вложенным подмногообразиям

Определение 60. Касательное пространство к поверхности уровня функции в некритической точке — это ядро ее дифференциала в этой точке.

***Теорема* 19–20.14.** *Градиент функции в некритической точке ортогонален ее поверхности уровня, проходящей через эту точку.*

Пример 6. Касательная к окружности перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания.

Определение 61. Касательное пространство к поверхности уровня гладкого отображения $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ в его некритической точке — это ядро дифференциала отображения в этой точке.

***Теорема* 19–20.15.** *Пусть 0 — некритическая точка гладкого отображения $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Выберем координаты $(x_1, ..., x_{n-m}, y_1, ..., y_m) = (x, y)$ так, чтобы касательная плоскость к поверхности в точке 0 совпадала с координатной плоскостью $y = 0$. Тогда поверхность $f = f(0)$ задается уравнением $y = \varphi(x)$, причем $d\varphi(0) = 0$.*

Это следует из формулы (3.23).

19–20.16. Достаточные условия наличия условного экстремума

См. §19–20.8 предыдущей лекции.

19–20.17. Доказательство теоремы 19–20.9

Доказательство. Пусть $a + h \in \Gamma$. Имеем:

$$f(a+h) - f(a) = H_a(h) + o(|h|^2). \tag{3.24}$$

Положительно определенная квадратичная форма не только не отрицательна вне нуля, но и превосходит $\alpha|h|^2$ для некоторого $\alpha > 0$. Поэтому

$$f(a+h) - f(a) \geq \alpha|h|^2 + o(|h|^2) > 0$$

при малом $h \neq 0$. □

19–20.18. Доказательство теоремы 19–20.10

Доказательство. Пусть, как и выше, $a + h \in \Gamma$. Тогда верна формула (3.24). Но функция $H_a(h)$ теперь не обязательно знакоопределна. Введем в $T_a\mathbb{R}^n$ Евклидову структуру. Тогда существует симметрический линейный оператор $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ такой, что $H_a(h) = (h, Ah)$. Из $a + h \in \Gamma$ следует: $h = (x, \varphi(x))$. Тогда

$$H_a(h) = ((x,0), A(x,0)) + 2((x,0), A(0,\varphi(x))) + ((0,\varphi(x)), A(0,\varphi(x))).$$

Два последних слагаемых равны $o(h)$ по теореме 19–20.15. Следовательно,

$$H_a(h) = H_a(x,0) + o(h). \text{ Но } H_a((x,0)) \geq \alpha|x|^2,$$

поскольку форма $H_a|_{T_a\Gamma}$ положительно определна. Далее, по теореме 19–20.15, $|x| = |h|(1+o(1))$. Поэтому $H_a(h) \geq \frac{\alpha}{2}|h|^2$. Дальнейшее доказательство — как в теореме 19–20.9. □

19–20.19. Как находить условный экстремум

См. §19–20.9.

19–20.20. Тейлоровское исчисление: вычисление производных неявной функции с помощью рядов

19–20.21. Локальные нормальные формы аналитических функций одного переменного

***Теорема* 19–20.16.** *Ненулевая аналитическая функция одного переменного в окрестности любой точки в специальной системе координат является степенной.*

***Замечание* 11.** *Показатель степени зависит от точки и полунепрерывен снизу.*

19–20.22. Лемма Морса

***Теорема* 19–20.17.** *Пусть многочлен f имеет вид*

$$f(x) = \sum \varepsilon_j x_j^2(1 + h_j(x)), \;\; h_j(x) = O(x). \tag{3.25}$$

Тогда функция f в некоторой окрестности нуля гладкой (и даже аналитической) заменой координат превращается в свой гессиан в этой точке плюс свободный член.

Аналогичная теорема верна для аналитических и бесконечно гладких функций, а также для функций конечной, но достаточно высокой гладкости. Мы сначала докажем лемму Морса для многочленов.

Наглядные следствия леммы Морса формулируются ниже.

19–20.23. Графики функций двух переменных в окрестности невырожденных критических точек

Определение 62. Критическая точка C^2-функции называется невырожденной (морсовской), если ее второй дифференциал в этой точке — невырожденная квадратичная форма.

Седла, вершины и ямы.

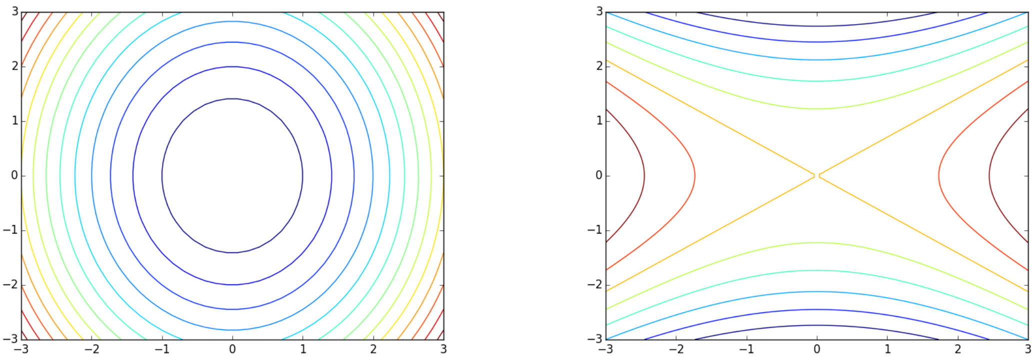

Рис. 3.5: Линии уровня функции двух переменных в окрестности невырожденной критической точки а) экстремума б) седла.

Рис. 3.6: Графики функций двух переменных в окрестности критических точек: а) локального максимума b) локального минимума c) седла

19–20.24. Поверхности уровня функции трех переменных в окрестности морсовских критических точек

По лемме Морса, в окрестности невырожденной критической точки, в специальной системе координат поверхности уровня функции трех переменных совпадают с квадриками: эллипсоидами, конусами, одно и двуполостными гиперболоидами. При переходе значения функции через критическое, топология поверхности уровня меняется: однополостный гиперболоид превращается в двуполостный.

19–20.25. Аналитические функции многих переменных

Определение 63. Аналитическая функция нескольких переменных (вещественных или комплексных) — это функция, заданная в открытой области, которая в окрестности каждой точки этой области разлагается в сходящийся к ней ряд Тейлора.

Примеры. 1. Многочлены
2. Произведения аналитических функций одной переменной от разных переменных: $f(x)g(y)$
3. Суперпозиции аналитической функции одной переменной и многочлена: $f(x+y)$ и т.д.

***Теорема* 19–20.18.** *Если функция $(\mathbb{Z}^+)^n \to \mathbb{C}$, $k \mapsto a_k$, мажорируется геометрической прогрессией:*

$$|a_k| \leq Cq^{|k|},$$

то ряд Тейлора

$$\sum = \sum_{k\in(\mathbb{Z}^+)^n} a_k z^k$$

Рис. 3.7: a) Окрестность локального экстремума b) Окрестность седла *сходится в полидиске* $|z_j| < \frac{1}{q}$.

Доказательство. Ряд $\sum$ мажорируется рядом $\sum^+ = C \prod \frac{1}{1-qz_j}$. □

19–20.26. Лемма Морса для аналитических функций двух переменных

***Теорема* 19–20.19** (Лемма Морса)*. Аналитическая функция двух переменных в окрестности невырожденной критической точки гладкой (и даже аналитической) заменой координат превращается в свой гессиан в этой точке плюс свободный член.*

Доказательство. В силу невырожденности гессиана в нуле,

$$f(x, y) = x^2 + \varepsilon y^2 + \text{ старшие члены }, \ \varepsilon = \pm 1$$

Старшие члены делятся либо на x^2, либо на y^2. Поэтому

$$f(x, y) = x^2(1 + h_1(x, y)) + \varepsilon y^2(1 + h_2(x, y)), \ \varepsilon = \pm 1.$$

Положим:

$$H(x, y) = (X, Y) = (x\sqrt{1 + h_1(x, y)}, y\sqrt{1 + h_2(x, y)}).$$

Функции X и Y гладкие (и даже аналитические);

$$dH(0) = E, \ \det dH(0) = 1.$$

Следовательно, замена H в окрестности нуля обратима.

$$G(X, Y) = f \circ H^{-1}(X, Y) = X^2 + Y^2.$$

□

19–20.27. Лемма Морса для аналитических функций многих переменных

***Теорема* 19–20.20.** *Пусть аналитическая функция f имеет вид* (3.25)*. Тогда функция f в некоторой окрестности нуля гладкой (и даже аналитической) заменой координат превращается в свой гессиан в этой точке плюс свободный член.*

Доказательство. $X_j = x_j\sqrt{1 + h_j(x)}$. □

19–20.28. Уничтожение полилинейных членов

Не всякая аналитическая функция с критической точкой 0 и невырожденным гессианом в этой точке имеет вид (3.25). Но всякая такая функция к этому виду приводится.

***Лемма* 19–20.21.** *Аналитическая функция с морсовой критической точкой* 0 *невырожденной положительной заменой приводится к виду* (3.25)*.*

Доказательство. Доказательство похоже на выделение полного квадрата. □