Лекция 27

1 Квадрируемость по Жордану.

Определение 1 *Подмножество X промежутка I квадрируемо по Жордану, если разность мер описанного около X и вписанного в X подразбиений стремится к 0, когда диаметр разбиения промежутка I стремится к 0. Описанное около X подразбиение разбиения P состоит из всех промежутков разбиения P, которые имеют с X непустое пересечение, вписанное в X - из всех промежутков разбиения P, принадлежащих X. Мера X - инфимум мер описанных и супремум мер вписанных подразбиений.*

Определение 2 *Мера подмножества $X \subset I$ - это интеграл*

$$\int_X 1dx = \int_I \chi_X(x)dx \tag{1}$$

Теорема 1 *Определения 1 и 2 меры X эквивалентны: интеграл (1) существует если и только если множество X квадрируемо по Жордану, и равен мере X в смысле определния 1.*

Доказательство Объем описанного около X (вписанного в X) подразбиения - это верхняя (нижняя) сумма интеграла из правой части равенства (1). □

2 График непрерывной функции.

Теорема 2 *График непрерывной функции $I \to \mathbb{R}$, где I - промежуток в $\mathbb{R}^n$, имеет $(n+1)$-мерную меру 0.*

3 Мера 0 и диффеоморфизмы.

Теорема 3 *Множество меры 0 при диффеоморфизме переходит в множество меры 0.*

4 Выпуклые множества.

Теорема 4 *Выпуклые множества квадрируемы по Жордану.*

Доказательство Возьмем внутреннюю точку 0 выпуклого множества $X \subset \mathbb{R}^n$ и представим $\mathbb{R}^n \setminus 0$ в виде прямого произведения $S^{n-1} \times \mathbb{R}^+$ (введем полярные коэффициенты в $\mathbb{R}^n$). В этих координатах граница ∂X - график непрерывной функции $S^{n-1} \to \mathbb{R}^+$ (следует из определения выпуклости). С помощью теоремы 3 доказывается, что ∂X имеет меру 0. $\square$

5 Теорема Фубини.

Теорема 5 *Кратный интеграл непрерывной функции по промежутку равен повторному.*

Расшифровка 1 *Пусть* $I = I_x + I_y \subset \mathbb{R}^n,\ I_x \subset \mathbb{R}^m,\ I_y \subset \mathbb{R}^l,\ m + l = n$. *Пусть*

$$F(x) = \int_{\{x\}\times I_y} f(x,y)dy. \tag{2}$$

Тогда

$$\int_{I_x} F(x)dx = \int_I f(x,y)dxdy. \tag{3}$$

Правая часть называется кратным интегралом *(раньше был термин просто "интеграл"). Левая часть называется* повторным интегралом *по понятной причине.*

Доказательство Эвристическое. Интеграл - это сумма. Даже обозначение интеграла, введеное Лейбницем, напоминает букву S. Теорема говорит, что интегральную сумму по всему промежутку I можно считать так: сначала просуммировать все слагаемые по столбцам - получится примерно член интегральной суммы для F- а потом результаты сложить - получится интеграл от F. Перейдем к точному описанию.

Формальное доказательство. Функция F, определенная формулой (2), непрерывна. Это следует из равномерной непрерывности f на I. Поэтому левая часть формулы (3) существует.

Пусть $P_x = \{I_1, ..., I_N\}$ и $P_y = \{J_1, ..., J_M\}$ - произвольные разбиения I_x и I_y, $P = P_x \times P_y$.

Основные неравенства:

$$\Sigma^-(f,P) \le \Sigma^-(F,P_x),\ \Sigma^+(F,P_x) \le \Sigma^+(f,P).$$

Мы докажем только первое неравенство; второе доказывается аналогично. Из этих неравенств и леммы о двух полицейских (бывших милиционерах) следует теорема.

Пусть $a_k = (\min_{I_k} F)|I_k|$ - один член суммы $\Sigma^-(F, P_x)$. На время фиксируем k. Пусть $\min_{I_k} F = F(x_k),\ x_k \in I_k$. Имеем:

$$F(x_k) \geq \Sigma^-(f|_{\{x_k\}\times I_y}, P_y) = \sum_{l=1}^{M}(\min_{\{x_k\}\times J_l} f) \cdot |J_l| \geq \sum_{l=1}^{M}(\min_{I_k\times J_l} f) \cdot |J_l|.$$

Следовательно:

$$a_k \geq \sum_{l=1}^{M}(\min_{I_k\times J_l} f)|I_k||J_l|.$$

Но выражение справа и есть часть нижней интегральной суммы $\Sigma^-(f, P)$, соответствующая "одному столбцу" $I_k \times I_y$. Тогда

$$\Sigma^-(F, P_x) = \sum_{1}^{N} a_k \geq \sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{M}(\min_{I_k\times J_l} f)|I_k||J_l| = \Sigma^-(f, P).$$

$\square$