# Лекции 25 - 26

## 1 Лемма о малой осцилляции

**Лемма 1** *Пусть $I$ - промежуток, $M \subset I$ - замкнутое множество. Пусть $f : I \to \mathbb{R}$ - ограниченная функция. Тогда для любого $\varepsilon$ существует $\delta$ такое, что если колебание функции $f$ на $M$ не больше $\varepsilon$, то для любого разбиения диаметра не больше $\delta$*

$$\Sigma^+(f, P'') - \Sigma^-(f, P'') \leq 2\varepsilon|I|, \tag{1}$$

*где*

$$\Sigma^{\mp}(f, P'') = \sum_{I_k \in P''} {}^{\min}_{\max_{I_k}} f|I_k|,$$

*и $P''$- множество всех промежутков разбиения $P$, принадлежащих $M$.*

**Доказательство** Для каждой точки $x$ возьмем окрестность $V_x$, в которой $\mathrm{osc}_{V_x} f \leq 2\varepsilon$; $V_x$ - шар с центром $x$ и радиусом $r_x$. Пусть $W_x$ - шар с центром $x$ и радиусом $\frac{r_x}{2}$. Выберем из покрытия $\{W_x\}$ конечное подпокрытие. Пусть $\delta$ - минимальный радиус шара этого подпокрытия.

Пусть $P$ -разбиение $I$ диаметра не больше $\delta$. Тогда каждый промежуток $I_k \in P''$ пересекает один из шаров $W_x$. Его диаметр меньше радиуса этого шара. Поэтому $I_k \in V_x$. Следовательно, $\mathrm{osc}_{I_k} f \leq 2\varepsilon$. Следовательно,

$$\Sigma^+(f, P'') - \Sigma^-(f, P'') = \Sigma_{I_k \in P''}(\mathrm{osc}_{I_k} f)|I_k| \leq 2\varepsilon|I|.$$

□

## 2 Достаточность условия Лебега.

**Основная лемма 1** *В условиях критерия Лебега, $\forall \varepsilon \exists \delta : diam\ P < \delta \Rightarrow \Sigma^+(f, P) - \Sigma^-(f, P) < \varepsilon$.*

**Доказательство** Возьмем $\varepsilon$ и будем искать $\delta$. Рассмотрим множество $K_\varepsilon$ тех точек, в которых колебание функции $f$ не меньше $\varepsilon$. Покроем $K_\varepsilon$ конечным числом открытых промежутков общей меры $< \varepsilon$ (здесь $\varepsilon$ играет двоякую роль!) Пусть $\delta_1$ - минимальный диаметр этих промежутков, $G$ - их объединение.

В точках множества $M = I \setminus G$ функция $f$ имеет колебание меньше $\varepsilon$. Рассмотрим соответствующее $\delta = \delta_2$ из леммы о малой осцилляции.

Возьмем $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Рассмотрим произвольное разбиение $P$ диаметра меньше $\delta$. Положим:

$$P = P' \sqcup P'', P' = \{I'_k\}, P'' = \{I''_l\},\ I'_k \cap G \neq \emptyset,\ I''_l \cap G = \emptyset.$$

Пусть $|P'| = \Sigma_{I'_k \in P'} |I'_k|$. По предложению "роса на камне",

$$|P'| \leq 3^n \varepsilon.$$

Следовательно, для любого набора $\alpha$, совместимого с $P$,

$$\Sigma_{I'_k \in P'} f(\alpha_k)|I'_k| \leq 3^n \varepsilon C,\ C = \sup_I |f|.$$

По лемме о малой осцилляции,

$$\Sigma^+(f, P'') - \Sigma^-(f, P'') \leq 2\varepsilon |I|.$$

Значит,

$$\Sigma^+(f, P) - \Sigma^-(f, P) \leq \Sigma^+(f, P'') - \Sigma^-(f, P'') + |\Sigma^+(f, P'| + |\Sigma^-(f, P'| \leq \varepsilon(3^n + 2|I|).$$

□

# 3 Окончание доказательства достаточности условия Лебега

Это рассуждение уже написано в лекции 24 и приводится здесь для полноты.

Пусть $L = \sup_P\{\Sigma^-(f, P)\},\ U = \inf_P\{\Sigma^+(f, P)\}$.

Из свойств интегральных сумм (аналог случая $n = 1$) следует: $L \leq U$.

Из основной леммы следует: $L = U$.

Докажем, что $\mathcal{I} := \int_I f(x)dx = L = U$. Фиксируем $\varepsilon$ и возьмем $\delta$ как в основной лемме. Для произвольного разбиения $P$ диаметра меньше $\delta$ возьмем произвольную интегральную сумму $\Sigma = \Sigma(f, P, \alpha)$. По основной лемме,

$$\Sigma^+(f, P) - \Sigma^-(f, P) < \varepsilon.$$

Но

$$\{L = U = \mathcal{I}\} \in [\Sigma^-(f, P),\ \Sigma^+(f, P)],\ \Sigma \in [\Sigma^-(f, P),\ \Sigma^+(f, P)].$$

Следовательно, $|\mathcal{I} - \Sigma| < \varepsilon$.

# 4 Необходимость условия Лебега

Возьмем последовательность $\varepsilon_n \to 0$. Пусть $K_\varepsilon$ - множество тех точек, в которых колебание функции $f$ не меньше $\varepsilon$. Из определений осцилляции и непрерывности следует, что множество $D$ точек разрыва функции $f$ имеет вид: $D = \cup K_{\varepsilon_n}$. Предположим, что $D$ не имеет меру ноль. Тогда существует такое $n$, что множество $K_{\varepsilon_n}$ не имеет меру ноль; фиксируем это $n$. Следовательно, существует такое $\alpha$ , что любое покрытие множества $K_{\varepsilon_n}$ промежутками имеет меру больше $\alpha$. Докажем, что для любого разбиения промежутка $I$ разность между соответствующей верхней и нижней интегральными суммами больше некоторой константы. Отсюда будет следовать, что интеграла Римана от функции $f$ не существует.

Пусть $P$ - произвольное разбиение промежутка $I$, $P'$ - объединение тех промежутков разбиения, пересечение которых с множеством $K_{\varepsilon_n}$ не пусто. Разобьем $P'$ на два подмножества, $P_1$ и $P_2$: промежутки первого подмножества имеют общие внутренние точки с множеством $K_{\varepsilon_n}$, промежутки второго не имеют. Множество $K_{\varepsilon_n}$ тоже разбивается на два: $K_1$ и $K_2$; $K_j$- пересечение $K_{\varepsilon_n}$ с объединением промежутков множества $P_j$. Объединение всех граней промежутков разбиния $P$ имеет меру 0. Поэтому $m(K_2) = 0,\ m(K_1) > 0$. Следовательно, для некоторого $\alpha > 0, |P_1| > \alpha$.

Колебание функции $f$ на каждом из промежутков множества $P_1$ не меньше, чем $\varepsilon_n$. Следовательно,

$$\Sigma^+(f, P) - \Sigma^-(f, P) \geq \Sigma^+(f, P_1) - \Sigma^-(f, P_1) \geq \varepsilon_n \cdot \alpha.$$

Поскольку разбиение $P$ произвольно, отсюда следует, что интеграла Римана от функции $f$ не существует.

# 5 Критерий Дарбу

**Теорема 1** *Функция $f : I \to R$ интегрируема по Риману $\Leftrightarrow L = U$, где $L$ и $U$ определены выше.*

**Замечание 1** *В полной формулировке, теорема Дарбу утверждает еще, что*

$$L = \lim_{diam P \to 0} \Sigma^-(f, P),\ U = \lim_{diam P \to 0} \Sigma^+(f, P).$$

*Мы этого не доказываем и не будем использовать.*

**Доказательство** Критерий Дарбу мгновенно следует из условия Лебега.

*Необходимость.* Пусть $f \in \mathcal{R}(I)$. Тогда для $f$ выполнено условие критерия Лебега. Тогда $L = U$, как доказано выше.

*Достаточность.* Пусть $L = U$. Докажем, что тогда выполнено условие критерия Лебега. Предположим противное. Тогда, как доказано выше, существует такое $c > 0$, что

$$\Sigma^+(f, P) - \Sigma^-(f, P) \geq c.$$

Отсюда следует, что $U - L \geq c$ - противоречие. $\square$

# 6 Интеграл Римана как линейный функционал

# 7 Квадрируемость по Лебегу и по Жордану

# 8 Интеграл по множеству