Лекции 24. Многомерный интеграл Римана и критерий Лебега.

1 Определение интеграла.

Всюду в этой лекции $x \in \mathbb{R}^n,\ x = (x_1, \ldots, x_n)$. В этой и следующих лекциях рассматриваются только ограниченные функции.

Определения.

a. Промежуток $I : x_j \in [a_j, b_j],\ b_j \geq a_j$

$|I| = \prod (b_j - a_j)\ j = 1, \ldots, n.$

b. Разбиение P: прямое произведение разбиений отрезков $[a_j, b_j]$.

$P = \{I_1, \ldots, I_N\}$; diam $P = \max \operatorname{diam}_{k=1,\ldots,N} I_k$.

c. Набор $\alpha : \alpha_k \in P_k$.

d. Интегральная сумма:

$$\text{дано } f : I \to \mathbb{R}(\text{или}\mathbb{C})$$

$$\Sigma(f, P, \alpha) = \sum_{k=1}^{N} f(\alpha_k)|I_k|$$

Определение 1 *Интеграл:*

$$\int_I f(x)dx = \lim_{diam\ P \to 0} \Sigma(f, P, \alpha), \tag{1}$$

при условии, что предел существует.

2 Основные теоремы.

Теорема 1 *Для любой функции $f \in C(I)$ интеграл (1) существует.*

Теорема 2 *(Критерий Лебега) $f \in \mathcal{R}(I)$, другими словами, интеграл (1) от функции $f \exists \Leftrightarrow$ множество точек разрыва функции f имеет меру 0.*

3 Множества меры нуль.

Определение 2 *Множество $E \subset \mathbb{R}^n$ имеет n-мерную меру $0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ существует не более чем счетное покрытие множества E промежутками I_k : $\Sigma |I_k| > \varepsilon$. Обозначение: $\mu_n(E) = 0$.*

Упражнения 1 *1. Счетное объединение множеств n-мерной меры 0 имеет n-мерную меру 0.*

2. $A \subset E,\ \mu_n(E) = 0 \Rightarrow \mu_n(A) = 0$.

3. В определении 2 можно брать как открытые, так и замкнутые промежутки.

4 Верхние и нижние интегральные суммы

Определение 3

$$\Sigma^{\mp}(f, P) = \sum_{1}^{N} \genfrac{}{}{0pt}{}{\min}{\max}_{I_k} f |I_k|.$$

Свойства интегральных сумм (доказываются, как в одномерном случае):

Свойства 1 1)

$$\Sigma^{-}(f, P) \le \Sigma(f, P, \alpha) \le \Sigma^{+}(f, P)$$

2)

$$\forall P, Q,\ \Sigma^{-}(f, P) \le \Sigma^{+}(f, Q)$$

3)

$$|\Sigma(f, P, \alpha)| < \max |f| \cdot \sum_{1}^{N} |I_k|,\ P = \{I_k\}.$$

5 Компакты меры 0

Предложение 1 *Любой компакт меры 0 покрывается конечным числом промежутков, сумма мер которых произвольно мала.*

Предложение 2 *(Роса на камнях.) Пусть $K \subset I$ - компакт меры 0. Тогда для каждого ε существует такое δ_0, что если $\delta < \delta_0$, и $P = (I_1, \dots, I_N)$ - произвольное разбиение I диаметром $\le \delta$, то*

$$\Sigma_{\substack{I_j \in P \\ I_j \cap K \neq \emptyset}} |I_j| < \varepsilon.$$

Доказательство Возьмем конечное покрытие U компакта K промежутками K_j : $\Sigma|K_j| < \varepsilon$. Пусть $\delta_0 = \min_{j=1,\dots,M} \operatorname{diam} K_j$. Пусть $\delta < \delta_0$. Тогда суммарный объем всех промежутков, задевающих K_j, не первосходит $3^n|K_j|$.

$$\Sigma_{\substack{I_j \in P \\ I_j \cap (\cup K_l) \neq \emptyset}} |I_j| < 3^n \varepsilon.$$

□

6 Осцилляция и точки разрыва.

Определение 4 *Осцилляция функции f в точке x_0 - это* $\limsup_{x \to x_0} f(x) - \liminf_{x \to x_0} f(x) = osc_{x_0} f$.

Функция f непрерывна в точке $x_0 \Leftrightarrow \operatorname{osc}_{x_0} f = 0$.

Лемма 1 *Для любого $a \geq 0$ и $\forall f$ множество точек $O_a = \{x | osc_x f \geq a\}$ замкнуто.*

7 Достаточное условие существования интеграла Римана функции f

Лемма 2

$$\forall \varepsilon \exists \delta : diam P < \delta \Leftrightarrow \Sigma^+(f, P) - \Sigma^-(f, P) < \varepsilon.$$

Доказательство [достаточности] Пусть $L = \sup_P \Sigma^-(f, P)$, $U = \inf_P \Sigma^+(f, P)$. По свойству 2 интегральных сумм, $L \leq U$. Докажем, что $L = U$ и равно интегралу $\mathcal{I}$, см. (1) . Возьмем произвольное ε , соответствующее ему δ, как в лемме, и рассмотрим произвольное разбиение P диаметра меньше δ и интегральную сумму $\Sigma = \Sigma(f, P, \alpha)$. Имеем:

$$\Sigma^+(f, P) \geq \mathcal{I} \geq \Sigma^-(f, P),$$

$$\Sigma^+(f, P) \geq \Sigma \geq \Sigma^-(f, P),$$

$$\Sigma^+(f, P) - \Sigma^-(f, P) < \varepsilon.$$

Следовательно, $|\mathcal{I} - \Sigma| < \varepsilon$. □